DE
INFINITORVM
SPIRALIVM
SPATIORVM MENSVRA.

DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA,

OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

AVTHORE
F. STEPHANO DE ANGELIS
VENETO,

Ordinis Iesuatorum S. HIERONYMI, in Veneta Prouincia Definitore Prouinciali.



VENETIIS, MDCLX.

Apud Ioannem La Noù.

SVPERIORVM PERMISSV.

Eminentiſſimo & Reuerendiſſimo D.D.

GREGORIO BARBADICO

Patritio Veneto, S.R.E. Cardinali Ampliſſimo, & Bergomenſium Vigilantiſs. Antiſtiti.

FR. STEPHANVS ANGELI VENETVS Ord. Ieſuatorum S. Hieronymi in Veneta Prouincia Prouincialis Definitor.

O. F. O.

LIBELLVM hunc de Infinitis Spiralibus tibi ſiſto Eminentiſſime Princeps, & Præſul, ampliſſimoq. nomini, àc dignitati inſcribo obſequentiſſimus. Palleſceret ſanè coram tui præclariſſima Purpura, quæ Maieſtate, & Virtute vernat ardenter, vilitas ingenij, & tenuitas muneris, niſi aliundè, & tui leniſſima vrbanitas, & mei deuictiſſima deuotio, concepta iam vota enixè firmarent. Spirales iſtæ lineæ, non aliundè quam

ab.

ab. E. T. spiritum sumerent, qui verè Geometrarum Mecenas peritissimus ad te colendum allicis quoscumque eiusdem generis seduliores profectus. Nec inanis, & futilis labor, quem complent spirales lineæ. Namquè circà vnicam earum speciem Archimedis ingenium fuisse aliquando versatum iactant prò summo pretio; quidni si E. T. tractationem dè Infinitis libare decerno? Profectò, à tui meritorum celsitudine decet vt hę lineæ punctum ducant, & in ipsam desinant, titulis luculentissimis protrahantur, patrocinio, ac tutela firmissima circumuallentur. Ex hinc, posito Inuidiæ obice, illo saltem gloriabuntur fato, quod E. T. Nomen ipsis circumliget gloriosè verticem, adeò vt si Cerua quondam Cęsaris circà collum explicans idioma venantium iacula euadebat illæsa; latrantium murmura & istæ paginæ spernent, exprimentes, quibus imprimuntur notis tutissimum sibi ipsis deditum pręsidium. Ergò opella hęc gloriosior cæteris prodeat, iam publicis plausibus excipienda, quia E. T. insignibus, & stemmatibus ditata, si vel ipsius Famæ potissima pręconia non lucretur, nihil se fuisse adeptam arbitratur. Nobilissimæ sobolis auitis laudibus, de te vnicè, & optimè superbientibus, attramenta hęc decorè linire vanum duco. Vnum namq. illud sufficiat, in E. T. specimen domesticas trabeas, infulas, & prętextas conspiraſse vniuersas, quò electiori tandem vt par erat, ornatissimè amicireris palludamento. Purpura, qua nunc primùm indueris, (licèt ipsa longè ante dignissimus,) carbasa iam dat ventis, vt nuperus Iason ad vellus aureum speciosè conquirendum, scilicet ad supremi honoris fastigia, cordibus cunctis auras tranquillas halantibus postremò prosperè appellas. Cæterum mea Mathesis, quæ E. T. litandas spirales lineas elucubrauit, ad postremum vsquè spiritum semper lineas deuotionis dicaturam pollicetur. Ità quod Apellis æmulatrix nulla sit dies, quæ in humillimæ obseruantiæ titulum non signet lineam. Valeas Eminentissime Princeps, & optime Antistes, ac felix viuas. Astra te diutius pietatis, & Virtutis tueantur seruatorem incolumen.

Scribebam Venetijs Kal. Julij Anno 1660.

LECTORI
BENEVOLO.

EN Tibi, Amice Lector, Opusculum Geometricum, *DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA*, non semel, aut bis, sed pluribus, ac iteratis vicibus pollicitum. Spirales, Helices, Implexæ, seu Volutæ lineæ de genere illorum sunt censendæ, quæ mirabilia, seu portenta geometrica iure merito sunt nuncupanda. Siquidem (vt concinnè Dauid Riualtus Archimedis Commentator pronunciat.) *Admissa Helica, & rite vt ars ipsius fert fabrefacta, nihil est in tota geometria abstrusum, & adhuc inuium, quod non denudetur, patefiat, & aperiatur.* Ast si ad ingens in rebus Geometricis Spiralis lineæ momentum corroborandum cætera deessent testimonia, vnicum me hercle sufficere arbitrandum: maximum scilicet Archimedis ingenium circa eas aliquando fuisse versatum; de ipsisque iustum volumen edidisse, in quo naturas, ac proprietates earundem ita expendit, vt sint posteris vsui maximo, & veluti cerebri ingeniosi portenta summæ admirationi. Cæterùm haud vnicus Archimedes extitit indagator spiralium proprietatum: sed ipsi se adiunxere quamplures, inter quos mirificè enitent Monarchiæ Geometricæ duo splendidissimi proceres, Pappus Alexandrinus lib. 4. collecti. Mathemat. & Franciscus Vieta lib. 8. responsorum Mathematicorum. Paulus Guldinus Sancto-Gallensis, ille celeberrimus Geometra sapientissimæ Societatis Iesù, & Centrobarycæ auctor famosus (at Caualenianorum indiuisibilium contemptor, & irrisor, qui dum indiuisibilia spreuit, ipsisque irrisit, se ipsum ridiculum præbuit) altius omnibus volatum sumpsit, conatusque est ipsam spiralem lineam ad mensuram determinatam redigere, atque ipsius centrum grauitatis assignare: at conatu irrito, & Icari fine, vt ipsemet in lib. 2. Centrobarycæ cap. 2. & infra fatetur, & prolixè explanat in capit. 3. Pronuper Ismael Bullialdus, vt lucem afferret ijs, quæ Archimedes de spiralibus conscripsit, totam rem spiralicam iterum proprio Marte composuit, & publici iuris fecit Parisijs anno 1657.

Sed inter cæteros spiralium proprietatum venatores extitere etiam duo illa maxima Geometrarum

b Italorum

Italorum fulgentia luminaria, nimirum Bonauentura Caualerius, & Euangelista Torricellius. Hic quidem incidenter in lib. de dimens. parabolæ proposit. 17. vt ex proportione circuli ad spatium spirale ab Archimede olim tradita, quadraturam ipsius ordinariæ parabolæ adinueniret. Ille verò ex instituto in lib. 6. Geomet. Indiuisib. vt ex analogia ab ipso animaduersa inter spirale spatium, & parabolam versante, ex mensura ipsius parabolæ prius tentata, omnia symptomata circa spiralium spatiorum mensuram denuò medijs ab alijs intentatis, nec aliquando excogitatis, patefaceret.

Verum enim vero omnes superius recensit geometræ, & plures, pluresque alij speciatim haud nominati, qui spiralibus incubuere aliquando, vnicam ipsarum speciem amplexati fuere: eam nimirum quæ antiquitùs ab Archimede ipsomet, & Conone agnita fuit: quamque nos in posterum linearem vocitabimus. Cæterum infinitas spiralium species (quod sciamus) nemo ante nos mundo publicauit. Non ergo putamus rem tibi ingratam fore futuram, Benigne Lector, quæ circa infinitas species spiralium linearum aliquando excogitauimus, communicare. Sed ante omnia causæ speculationis huiusce accipe historiam.

Vndecim ab hinc annis circiter dum Romæ degeremus, & dum inter geometricos Tyrones enumeraremur, iucundissimum existimabatur à nobis quotiescunque datum fuisset suauissima consuetudine, ac excellentissima doctrina perfrui trium summorum virorum, à quibus nunquam absque lucro discedebamus. Erant hi Michael Angelus Riccius Geometrarum Italorum Coryphæus, & post Caualerij, ac Torricellij fatum, geometricæ maiestatis italicæ præsidium præcipuum: Renatus Franciscus Slusius Leodiensis ingeniorum Phœnix, & maximum humanæ intelligentiæ portentum: & Ricardus Albius Anglus pietate, sanguine, & eruditione nobilissimus, atque suo Hemisphærio dissecto clarissimus. Accidit ergo die quadam, de more cum prefato Riccio de rebus geometricis verba habentes, vt mutui discursus subiectum ipsæ essent infinitæ parabolæ, & caualeriana indiuisibilium geometria: cumque ad sextum illius librum deuentum esset incidenter, audiuimus Riccium asserentem, ad similitudinem Caualerij, infinitas spirales posse mensurari, cui negotio sedulo incumbere ab ipso etiam fuimus sollicitati. Ast tunc temporis nimis imbecilles, ac tenues in nobis erant geometricæ vires. Tyrocinium etenim percurrebamus, & lacte dumtaxat enutriebamur; vixque dabatur ea posse percipere, quæ Caualerius molitus fuerat; tantum aberat, vt ipsum imitari liceret, tamque in altum conscendere. Quapropter euenit, vt labore perterriti, statim infinitæ è mente spirales exierint. Verùm anno 1658. post libelli nostri sexaginta problematum geometricorum impressionem, fato accidit, vt Venetijs in Biblio-

tèca Mineruæ commorantes, ad nostras peruenerit manus opus verè aureum Andreæ Tacquet Mathematici Excellentissimi, ac solertissimi Fulgentissimæ Societatis Iesù, *Cylindrica, & Annularia nuncupatum*. Quod reuoluentes, citius dicto incidimus in scholium prop. 12. lib. 1: in quo vocatus à nemine, vltrò seipsum constituit spectabilissimæ indiuisibilium methodi iudicem; contraque ipsam non minus inclementem, quam iniustam sequentem profert sententiam. *Methodum demonstrandi per indiuisibilia, vel (vt ego appellare soleo) per heterogenea, quam nobilis geometra Bonauentura Caualerius in lucem protulit, pro legitima, ac geometrica admittendam non existimo, &c.* (Sed quicquid autumet ipse, pro indiuisibilibus est veritas ipsamet, stantque illi omnes præclarissimi geometræ, quos in epistola ad lectorem operis nostri de Infinitis Parabolis recensuimus: quibus nuperrime vltrò se associauit Vincentius Viuiani in lib. 1. de Maximis, & Minimis monito post proposit. 17. vbi ait. *Vt hoc loco, ex aduerso indirectæ antiquorum viæ per duplicem positionem, luce clarius pateat quantum facilitatis, breuitatis, atque euidentiæ nascifcatur è noua, directaque methodo (rectè tamen, cautèque vsurpata) acutissimi Geometræ Caualerij, per indiuisibilium doctrinam nobis amicissimam &c.*) Illicò Tacquet exemplar pecunia proprium fecimus; ac diligentissimè ipsi studuimus; doctrinasque nouas, & peregrinas in ipso comprehensas semper admirati fuimus. Sed animaduertimus mancum ipsum extitisse, quia Caualerianis indiuisibilibus

bilibus

bilibus aduersabatur, veluti fusè explicauimus in schol. vltimo lib. 2. de Infinit. parab. Hæc igitur vnica, & genuina causa impullit nos quædam rimari, in quibus Tacquet videbatur deficere. Cumque geometrica inuenta facillime prodeant ex alijs prius animaduersis: agerque geometricus adeo sit fertilis, vt copiosissimos fructus illis reddat, qui mentis ligone ipsum effodiunt: hinc ortum duxit, vt ea omnia colligeremus, quæ in dictis libris de Infinit. parab. euulgauimus: & paulo post breui temporis interstitio, quę in nostris Miscellaneis Hypperbolico, & Parabolico, ac in Geometrico publicauimus. Porrò dum res ad infinitas parabolas attinentes pertractaremus, hæque nobis iam sat familiares apparerent, denuo infinitæ sperales in mentem deuenere: atque maturè discussa, & pensitata analogia à Caualerio agnita inter spiralem archimedeam, & parabolam quadraticam; videbatur nobis ipsam ad infinitas spirales, & infinitas parabolas non multo labore extendi posse. Et quidem determinatè statueramus ab initio opusculum de infinitis spiralibus pro quinto subnectere quatuor libris de infinitis parabolis: & hac de causa dumtaxat concinnauimus in lib. 1. propositiones 23. & 24. lemmaticas pro spiralibus, & nullis in dictis libris ordinatis inseruientes. Sed varijs de causis coacti fuimus illud opus citissimè absoluere, ac tam impolitum, vt apparet, publici iuris facere, & opusculum de infinitis spiralibus ad hoc vsque tempus reseruare. Hæc ergo, Benigne Lector, vera est, & vni-

&vni-

& vnica inuentorum nostrorum historia: quam candide tibi tradidimus, vt nullus laude defraudetur emerita. De infinitis namque spiralibus nescimus quempiam verba fecisse. Sed prima ad hæc rimanda incitamenta à nobilissimo Geometra Riccio habuimus. An verò infinitæ spirales, quas in posterum sumus explicaturi illæ sint eædem, quas Riccius in votis olim habebat, penitus ignoramus. Ast quomodocunque sit, sequentia omnia proprio Marte compillauimus; & distintius quam licuit Tibi communicare conati fuimus, vt à simili labore subleueris. Sequentia percurre. Alia, fauente Deo, is succedent. Vale.

Noi

Noi Reformatori dello Studio di Padoa.

HAuendo osseruato per fede del P. Inquisit. non esserui nel Libro intitolato De Infinitorum Spiralium Spatiorum del P. F. Steffano de Angelis cosa contro la Santa Fede, e parimente per attestato dal Segretario nostro niente contro Prencipi, ò buoni costumi, concedemo licenza, che possi essere stampato, douendo osseruarsi gl'ordini, & esserne presentate due copie per le presente Libraríe di Padoa, e di questa Città.

Dat. dal Magist. nostro li 27. Agosto 1660.

Zuanne Donado Ref.
Nicolo Capello Ref.

Alemante Angelo Donini Segr.

Facul-

Facultas Reuerendissimi Patris Generalis.

Laudetur Iesus Christus.

OPus inscriptum, *De Infinitorum Spiralium Spatiorum Mensura.* compositum ab Admodum R. P. Stephano de Angelis Veneto Professo Nostri Ordinis Iesuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat necessarias licentias, & approbationes, quæ de iure sunt necessariæ &c. In quorum fidem præsentes manu propria subscripsimus, ac proprio Nostri Officij sigillo muniuimus.

Datum Brixię in Nostro Monasterio Corporis Christi, die 28. Iunij 1660.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Iesuat.

DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA,

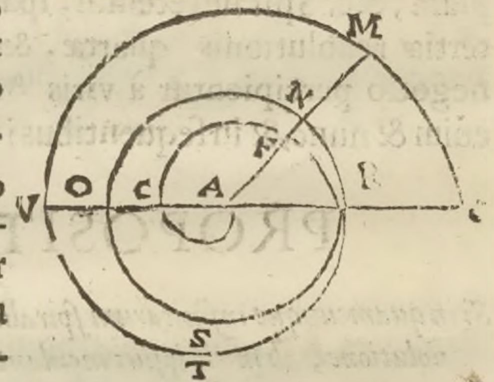
OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

ARchimedes Geometrarum facile Princeps in aureo illo libello, quem de spiralibus, seu Helicibus conscripsit, ante cætera, naturam ipsarum luculenter explanat, definiens. Spiralem lineam fore illam nuncupandam, quæ à duplici motu æquabili, eodemque peracto tempore ortum ducit: nimirum, semidiametri dati circuli circa centrum immotum: & centri interim semidiametrum ipsam permeantis. Ità etenim loquitur. *Si recta linea in plano, altero eius termino quiescente circumferatur, donec ad locum redierit vndè primo cæpit moueri, & simul cum hac circumducta linea punctum feratur & ipsum sibi*

ipsi æquali semper velocitate moueatur secundum ipsam lineam motam, incipiatque à termino lineæ quiescente versus alterum feri punctum, huiusmodi spiralem lineam in plano describet. Vt e. g. in schem. seq. consideremus semidiametrum A R, immoto puncto A, ciari æquabiliter, adeo vt describat circulum R S O N R, interim verò etiam punctum A, moueatur æquabiliter per A R, adeo vt eodem tempore punctum R, describat peripheriam R S O R, punctum verò A, perueniat ad R. Lineam curuam A C F R, ortam ex duplici hoc motu æquabili appellat Archimedes lineam spiralem primæ reuolutionis. Sicuti spatium A C R A, contentum linea curua prædicta, & recta A R, vocat primum spatium. Circulum cuius semidiameter AR, circumscriptum dicto spatio, primum circulum. Punctum A, principium lineæ spiralis. Positionem lineæ A R, à qua incepit circulatio, principium circulationis. Si autem radius A R, intelligatur duplicatus in R G, vel triplicatus &c. & motus continuetur vt prius: appellat Archimedes spirales secundæ circulationis; tertiæ; &c. idem dicit de spatijs, & circulis. Sed hæc omnia locupletiùs percipientur ipsomet Archimede inspecto, sicuti & nostra sequentia: namque nos in sequentibus omnes Archimedis terminos passim vsurpabimus.

At nos vniuersalius supponimus generari spirales. Supponimus enim cum Archimede generari vtique ex duplici motu eorundem mobilium: quorum ille, qui fit à centro permeante semidiametrum, sit

sit semper æquabilis; ast ille, qui fit à semidiametro fixa in centro, sit vel æquabilis, vel variè acceleratus. Si ergo moto æquabiliter A, per AR, etiam AR, fixa in A, æquabiliter gyretur per circumferentiam RSOR: linea ACFR, genita ex duplici tali motu, vocatur à nobis prima spiralis, seù linearis, quæ est Archimedea. Si verò puncto A, æquabiliter moto per AR, interim AR, moueatur motu taliter accelerato, vt spatia RS, RSO, &c. peracta, sint vt quadrata temporum in quibus peraguntur: linea ACR, vocetur secunda spiralis, seu quadratica. Si verò AR, moueatur motu taliter accelerato, vt spatia RS, RSO, sint vt cubi temporum: Illa linea dicetur tertia spiralis, seù cubica. Et sic in infinitum, secundum quod spatia peracta sunt ad inuicem, vt altiores temporum, in quibus peraguntur, potestates.



Si vero semidiametro AR, producta in G, adeo vt potestas G A, eiusdem gradus cum spirali sit dupla similis potestatis A R. v.g. in spirali lineari, sit G A, dupla A R: in quadratica sit quadratum G A, duplum quadrati A R: in cubica cubus sit duplus

cubi, &c. & intelligamus continuari motus priores, ſecundum quod explicatum fuit ſupra ex Archimede in ſpirali ſecundæ reuolutionis: lineæ genitæ, ſpatia, circuli, &c. dicendi ſunt ſecundæ reuolutionis, &c. Idem dicendum ſi poteſtas AR, eiuſdem gradus cum ſpirali intelligeretur triplata, quadruplata, &c. Spirales etenim, ſpatia, &c. dicerentur tertiæ reuolutionis, quartæ, &c. Hæc omnia nullo negotio percipientur à viris Archimedeis: ipſum enim & nunc, & in ſequentibus imitabimur.

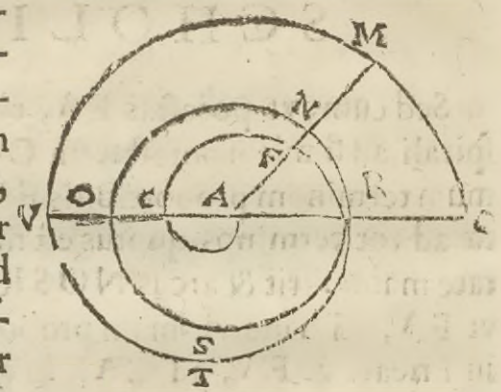
PROPOSITIO I.

Si in quamcunque infinitarum ſpiralium, ortam ex prima reuolutione, ab initio ipſius incidant duæ lineæ, quę producantur vſque ad circumferentiam primi circuli. Arcus circuli in pręcedentia contenti inter initium circulationis, & ductas lineas, erunt ad inuicem, vt poteſtates incidentium in ſpiralem eiuſdem gradus cum ſpirali.

ESto quælibet ex infinitis ſpiralibus ACFR, orta ex prima reuolutione, & eſto primus circulus RSOR, & in ſpiralem incidant ab initio A, duæ rectæ AC, AF, quæ occurrant circumferentiæ in O, & N. Dico circumferentiam RSO, eſſe ad circumferentiam RSON, vt poteſtas AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AF. V.g. in prima ſpirali, ſeu lineari, vt AC, ad AF. In ſec. hoc eſt quadratica, vt quadratum AC, ad qua-

dratum

dratum AF. In cubica, vt cubus AC, ad cubum AF. Et ſic in infinitum. Præſens propoſitio parùm diuersè oſtendetur à modo, quo demonſtratur ab Archimede in lineari in propoſit. 14. Quoniam enim AC, eſt ad AF, vt tempus motus per AC, puncti A, ad tempus motus eiuſdem puncti A, per AF (quia motus puncti A, ſupponitur æquabilis): ergo & vt quælibet poteſtas AC, ad homogeneam poteſtatem AF, ſic ſimilis poteſtas temporis motus A, per AC, ad ſimilem poteſtatem temporis motus A, per AF. Sed vt poteſtas temporis eiuſdem gradus cum ſpirali motus A, per AC, ad ſimilem poteſtatem motus per AF, ſic ex hypotheſi, arcus RSO, ad arcum RSON. Ergo & arcus ad arcum erit, vt poteſtas AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AF. Quod &c.



COROLLARIVM.

Ergo conuertendo, & diuidendo, erit arcus NO, ad arcum OSR, vt exceſſus poteſtatis AF, eiuſdem

gradus

gradus cum ſpirali ſupra ſimilem poteſtatem A C, ad ſimilem poteſtatem A C.

SCHOLIVM.

Sed cum, vt poteſtas F A, eiuſdem gradus cum ſpirali ad ſimilem poteſtatem C A, ſic F A, ad vltimum terminum proportionis F A, ad C A, continuatæ ad tot terminos quotus eſt numerus ſpiralis vnitate maior: erit & arcus N O S R, ad arcum O S R, vt F A, ad hunc vltimam proportionalem. Nempe in lineari vt F A, ad C A. In quadratica, vt F A, ad tertiam proportionalem minorem ipſarum F A, C A. In cubica ad quartam: Et ſic in infinitum. Et diuidendo, erit N O, ad O S R, vt exceſſus F A, ſupra vltimam minorem proportionalem ad ipſam.

PROPOSITIO II.

Si in quamcunque infinitarum ſpiralium ex alijs reuolutionibus genitam, & in ſibi circumſcriptum circulum incidant duæ lineæ, vt prius. Poteſtates incidentium in ſpiralem eiuſdem gradus cum ſpirali erunt ad inuicem, vt arcus prædicti, vna cum tot integris peripherijs, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor.

SEd poteſtate ſemidiametri A R, congruente ſpirali, duplata, triplata, &c. in G, vt explicatum fuit ſupra, intelligamus continuatis motibus, ſpiralem A C F R, continuatam fore in T V M G, &c. cui A C, A F, incidant in V, M. Dico in prima ſpirali, eſſe A M, ad A V, vt tota circumferentia circuli R S Q R, tot vicibus accepta, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor, vna cum arcu N O S R, ad eundem numerum totius circumferentiæ R S O R, vna cum arcu R S O. In ſecunda, ſic eſſe quadratum A M, ad quadratum A V. In tertia, ſic cubum ad cubum. Et ſic in infinitum. Diximus autem A M, A V, eſſe in prædictis rationibus cum circumferentijs circuli cuius ſemidiameter A R, quia iſti arcus ſunt in eadem ratione cum ſimilibus arcubus circuli cuius ſemidiameter A G, ad cuius peripheriam intelligendæ ſunt extenſæ A V, A M; quia ſunt concentrici.

Hæc propoſit. oſtendetur ad modum ſuperioris, & ad modum Archimedis in propoſit. 15.

COROLLARIVM.

Ergo conuertendo, & diuidendo, erit exceſſus poteſtatis A M, eiuſdem gradus cum ſpirali ſupra ſimilem poteſtatem A V, ad poteſtatem A V, vt arcus N O, ad arcum O S R, vna cum tot integris peripherijs R S O R, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor.

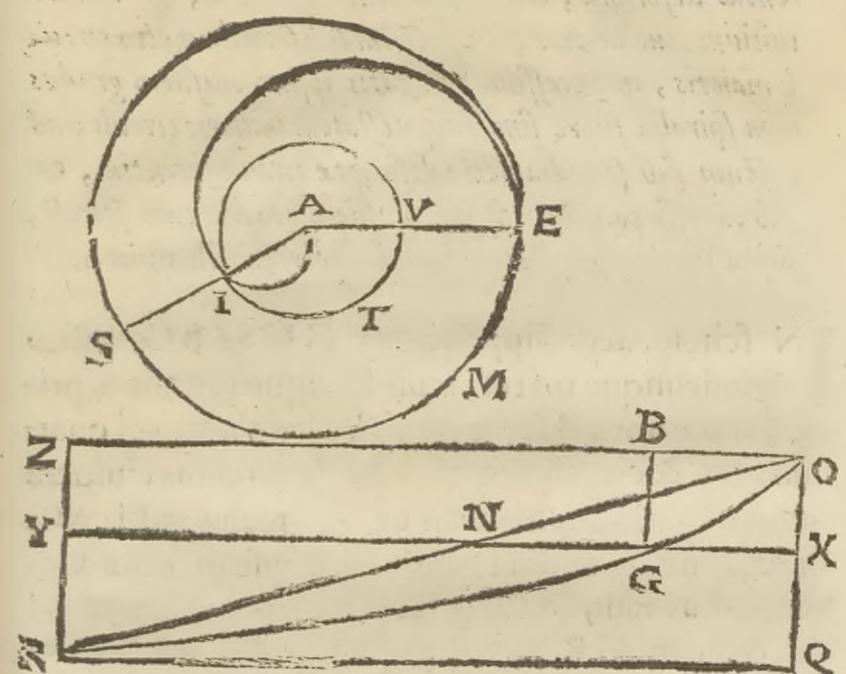
PRO-

PROPOSITIO III.

Si à semidiametro primi circuli circumscripti spatio spirali abscindatur quælibet linea, & centro initio, semidiametro abscissa describatur circuli peripheria. Erit tota circumferentia primi circuli, ad peripheriam descripti circuli contentam inter lineam initium reuolutionis, & spiralem, in præcedentia, vt potestas radij primi circuli vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem abscissæ.

IN schem. seq. abscissa AV, ab AE, semidiametro primi circuli circumscripti primo spatio cuiuscunque spatij spiralis AIEA, centro A, interuallo AV, describatur circulus VTIV. Dico totam circumferentiam EMSE, esse ad circumferentiam VTI, vt potestas EA, vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV. V.g. in lineari, vt quadratum ad quadratum. In quadratica, vt cubus ad cubum. Et sic in infinitum. Namque, ratio circumferentiæ EMSE, ad VTI, componitur ex ratione ipsius ad totam circumferentiam VTIV, & huius ad VTI, (nempe circumferentiæ EMSE, ad EMS.) Sed vt EMSE, circumferentia ad totam VTIV, sic EA, ad AV; & vt eadem EMSE, ad EMS, sic ex proposit. pri. potestas EA, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AI, seu AV. Ergo & ratio circumferentiæ ad circumferentiam componetur ex his

duabus



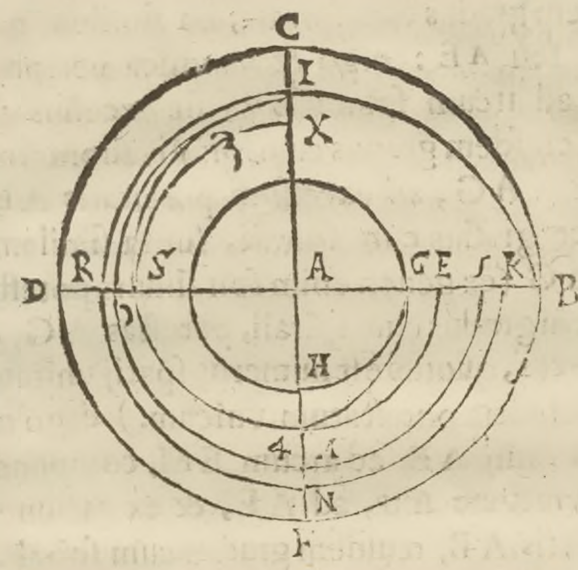
duabus rationibus : nempe circumferentia ad circumferentiam erit, vt potestas EA, vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV. Quod &c.

PROPOSITIO IV.

Si in excessu semidiametri circuli circumscripti cuilibet spatio Helico à primo, supra semidiametrum circuli vnitate minoris, sumatur punctum; & centro initio, interuallo assumpto puncto, describatur circuli peripheria. Erit to-

ta circumferentia maioris circuli, ad portionem circumferentiæ deſcriptæ, contentam inter ſpiralem, & lineam initium reuolutionis, vt factum ſub ſemidiametro circuli maioris, in exceſſum poteſtatis ipſius eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem minoris circuli, ad factum ſub ſemidiametro deſcriptæ circumferentiæ, & ſub exceſſu poteſtatis ipſius eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem ſemidiametri circuli minoris.

IN ſchem. ſeq. ſupponamus GMSIBG, eſſe quodcunque ſpatium cuiuſcunque ſpiralis à primo, nimirum vel ſecundum, vel tertium, vel quartum, &c. & circulus radij AB, ſit circulus eiuſdem numeri ſpatio circumſcriptus, vt circulus radij AG, ſit ipſo vnitate minor: nimirum ſi ipſe ſit ſecundus, ſit circulus radij AG, primus: ſi tertius, ſecundus: &c. & inter GB, accepto puncto E, intelligatur circulus radij AE. Dico peripheriam radij AB, eſſe ad peripheriam EM, contentam inter AB, & ſpiralem in M, vt factum ſub BA, in exceſſum poteſtatis BA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG, ad factum ſub EA, in exceſſum poteſtatis ipſius eiuſdem cum ſpirali gradus, ſupra ſimilem poteſtatem AG. V.g. in prima ſpirali, vt rectangulum ABG, ad rectangulum AEG. In ſec. vt factum ſub AB, in differentiam quadratorum AB, AG, ad factum ſub AE, in exceſſum quadrati ipſius ſupra quadratum AG. Et ſic in infinitum in altioribus ſpiralibus.



Ratio enim circumferentiæ radij AB, ad circumferentiam EM, de foris ſumpta circumferentia radij AE, componitur ex ratione ipſius ad circumferentiam radij AE, & huius ad circumferentiam EM. Sed vt circumferentia radij AB, ad circumferentiam radij AE, ſic radius AB, ad radium AE: & vt circumferentia radij AE, ad arcum EM, ſic circumferentia radij AB, ad arcum BF. Quare ratio circumferentiæ radij AB, ad arcum EM, componetur ex rationibus AB, ad AE, & circumferentiæ radij AB, ad arcum BF. Verum, quoniam ex propoſit. ſecund. eſt vt circumferentia radij AB, tot vicibus accepta quotus eſt numerus ſpatij, ad eandem acceptam ſecundum numerum vnitate mino-

minorem, ſimul cum arcu BF, ſic poteſtas BA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AM, ſeù AE: ergo & vt vnica peripheria radij AB, ad arcum ſolum BF, ſic exceſſus poteſtatis AB, eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG, ad exceſſum poteſtatis AE, itidem eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG (ex geneſi enim ſpiralium, poteſtatis AB, eiuſdem gradus cum ſpirali, poteſtas AG, continet tot partes, quotus eſt numerus ſpatij vnitate minor, & differentia poteſtatum, vnicam.) Ergo ratio peripheriæ radij AB, ad arcum EM, componetur quoque ex ratione AB, ad AE, & ex ratione exceſſus poteſtatis AB, eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG, ad exceſſum ſimilis poteſtatis AE, ſupra eandem poteſtatem AG. Nempe erit ad ipſum, vt factum ſub AB, in priorem exceſſum, ad factum ſub AE, in poſteriorem exceſſum. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

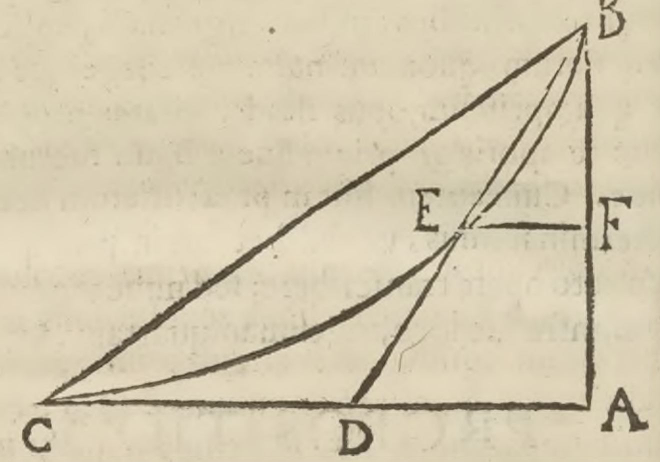
Quæ ſint infinita trilinea parabolica explicatum fuit initio primi libri eorum, quos de infinitis parabolis euulgauimus. Diximus enim ibidem, nos pro talibus trilineis intelligere ſpatia, quæ ſunt exceſſus parallelogrammi circumſcripti infinitis ſemiparabolis ſupra ipſas. De infinitis trilineis in propoſit. 23. & 24. eiuſdem libri oſtendimus duas proprietates,

tes, quæ, quoniam ſtatueramus ab initio cum opere de infinitis parabolis edere etiam hoc opuſculum de infinitis ſpiralibus, in harum gratiam explicatæ fuere. Verum, quoniam multa nos coegerunt abſoluere quamprimum opus illud, citatæ propoſitiones tunc temporis proprium finem haud fuerunt conſecutæ. Cum autem ſint in præſentiarum neceſſariæ, determinauimus, vt cuilibet ſint in promptu, ipſas ex citato opere tranſcribere; ſed nunc vigeſimamtertiam, infra ſuo loco, vigeſimamquartam. Sit ergo.

PROPOSITIO V.

Si à vertice cuiuſcunque trilinei à primo ducatur linea in baſim ſecans curuam parabolicam: & per punctum vbi ſecat curuam ducatur vſque ad diametrum parallela baſi. Erit baſis trilinei ad ſui partem interceptam inter ductam, & diametrum, vt poteſtas diametri trilinei vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem diametri trilinei ad verticem.

Sit quodlibet trilineum à primo (nempe primo excepto, quod eſt triangulum) CBA, cuius vertex B, diameter BA, & à vertice B, ducatur BD, in baſim ſecans curuam in E & per E, ducatur EF, parallela CA. Dico CA, eſſe ad AD, vt poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. V.g. in trilineo quadratico, erit CA, ad AD, vt AB, ad BF. In cubico, vt quadra-



quadratum AB, ad quadratum BF. In quadrato-quadratico, vt cubus AB, ad cubum BF. Et sic in infinitum. Quoniam enim proportio CA, ad AD, componitur ex proportione CA, ad EF, & huius ad DA: ex genesi autem parabolarum, est vt CA, ad EF, sic potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad similem potestatem BF: & vt EF, ad DA, sic BF, ad BA. Ergo ratio CA, ad AD, componetur ex rationibus potestatis AB, eiusdem gradus cum trilineo ad similem potestatem BF, & ex ratione BF, ad BA. Sed ex istis duabus rationibus componitur ratio potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei, ad similem potestatem BF. Ergo patet propositum.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Excessus primi circuli supra quodlibet spirale spatium ex prima reuolutione, est æqualis trilineo parabolico vno gradu altiori spatio spirali, cuius diameter sit æqualis semidiametro circuli, basis verò circumferentiæ.

SIt quæcunque spiralis ex prima reuolutione AIE, AE, verò sit linea reuolutionis initium, sitque etiam semidiameter circuli primi; pariter esto parallelogrammum rectangulum ZQ, circumscriptum semiparabolæ ZOR, cuius basis ZR, vertex O, quæ sit gradus vnitate altioris gradu spiralis: v.g. si spiralis sit linearis, parabola sit quadratica: si spiralis sit quadratica, parabola sit cubica: &c. insuper ZR, seu OQ, sit æqualis semidiametro EA, ZO, verò, seu RQ, sit æqualis circumferentiæ EMSE. Dico excessum circuli supra spatium spirale (qui deinceps breuitatis gratia vocabitur excessus absolutè) æqualem esse RGOQ, trilineo. Accipiatur in AE, arbitrariè punctum V, & centro A, interuallo AV, describatur circulus secans spiralem in I, & ducatur AIS: deinde fiat OX, æqualis AV, seu AI, & ducatur XGY, parallela RQ, & per G, ipsa GB, parallela RZ. Quoniam enim ex natura parabolæ explicata initio lib. pri. de infin. parab. est vt potestas RZ, seù OQ, congruens parabolæ ad similem potestatem BG, seù OX, sic

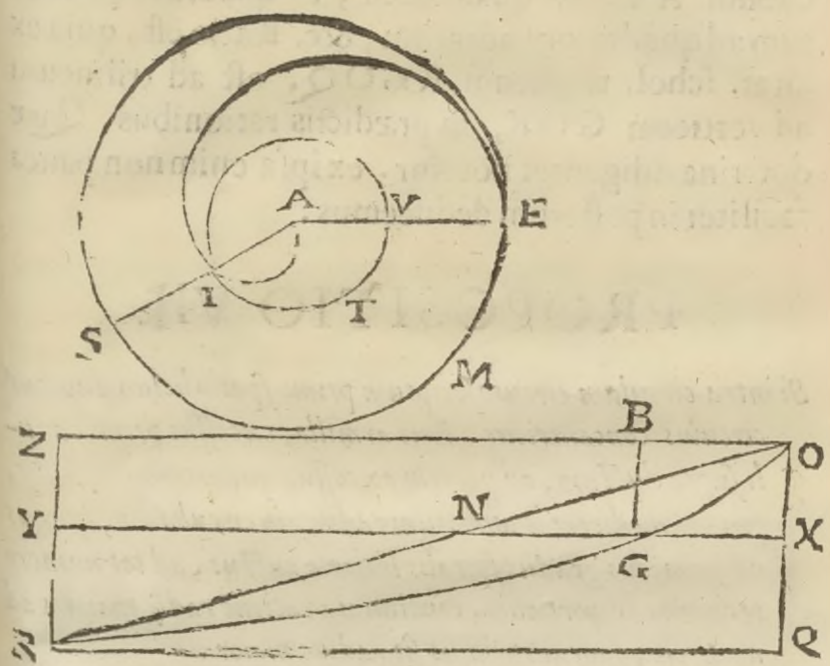
ZO,

ZO, seù RQ, ad BO, seù GX: & cum vt talis potestas QO, ad similem potestatem OX, sic in spirali similis potestas EA, ad similem potestatem AV (quia QO, OX, sunt æquales ipsis EA, AV.) Ergo vt RQ, ad GX, sic potestas EA, congruens parabolæ, nempe vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV, seù AI. Sed ex proposit. 3. vt talis potestas EA, ad potestatem AI, sic circumferentia EMSE, ad circumferentiam VTI. Ergo & vt RQ, seù YX, ad GX, sic circumferentia EMSE, ad circumferentiam VTI. Ergo & permutando, vt XY, ad EMSE, sic GX, ad VTI. Sed ex constructione, YX, seù RQ, est æqualis circumferentiæ EMSE. Ergo etiam GX, erit æqualis VTI. Cum ergo puncta V, X, sumpta fuerint arbitrariè, ergo omnes lineæ trilinei RGOQ, parallelæ RQ, erunt æquales omnibus circumferentijs excessus circuli EMSE, supra spirale spatium; quæ circumferentiæ sunt concentricæ ipsi EMSE. Ergo & trilineum erit æquale prædicto excessui. Quod &c.

SCHOLIVM.

Notetur autem, quod supradicta propositio non solum verificatur secundum totas magnitudines, sed etiam secundum ipsarum partes proportionales. Nimirum, non modò totus excessus circuli erit æqualis toto trilineo RGOQ, sed etiam si AV, OX,

sint



sint æquales, pars excessus clausa circumferentia EMSE, spirali EI, circumferentia ITV, & recta EV, erit æqualis trapezio parabolico RGXQ. Idem intelligatur de alijs partibus, dummodo semper AE, QO, æqualiter secentur.

Ex hac doctrina, & ex schol. 1. proposit. 3. lib. 1. de Infinit. Parab. deducemus, quod si centro A, interuallo AV, describatur quælibet circumferentia VTI: erit totus excessus ad partem sui clausam curuis AI, ITV, & recta AV, vt potestas EA, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem po-

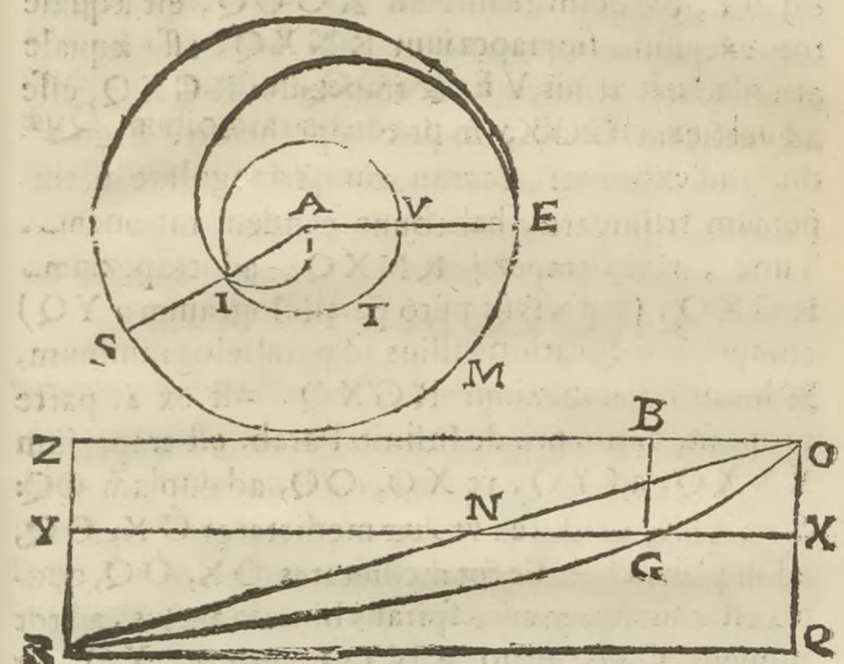
testatem AV. V.g. in lineari, vt cubus EA, ad cubum AV. In quadratica, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum, &c. Ratio est, quia ex citat. schol. trilineum RGOQ, est ad trilineum ad verticem GOX, in prædictis rationibus. Quæ doctrina diligenter notetur, ex ipsa enim non pauca faciliter in posterum deducemus.

PROPOSITIO VII.

Si intra circulam circumscriptum primo spatio helico ducatur circulus concentricus. Erit armilla, excessus primi circuli supra ductum, ad partem excessus quam comprehendit, vt tot medietates amborum radiorum circulorum, quotus est numerus gradus spiralis binario auctus, ad tot numero terminos proportionis, continuata ratione radij maioris ad minorem, quorum primus sit radius maior.

IN eodem schemat. centro A, radio AV, sit quilibet circulus concentricus ipsi EMSE, & ipso minor, secans excessum, & spatium, vt in schemate. Dico armillam circularem cuius latitudo VE, quæ est differentia circulorum, esse ad partem excessus, quam continet, nempe illam, quam claudunt peripheria EMSE, spirali EI, circumferentia VTI, & recta VE, vt tot medietates ipsarum EA, AV, quotus est numerus gradus spiralis binario auctus, ad EA, AV, cum tot continuè proportionalibus proportionis EA, AV, continuatæ, quotus

est



est idem numerus gradus spiralis binario auctus. V.g. in spirali lineari, vt 3. medietates ipsarum EA, AV, seu vt EA, AV, sesquialteræ, ad EA, AV, cum tertia proportionali. In quadratica, vt 4. medietates EA, AV, seu vt ipsarum duplæ, ad EA, AV, cum duobus alijs terminis continuè proportionalibus. Et sic in infinitum.

Trilineum parabolicum anteced. proposit. sit sectum cum triangulo sibi circumscripto linea NGX, RQ, parallela, vt QX, æquetur EV. Patet faciliter ex proposit. anteced. & ex eius schol. sicuti to-

C 2 tum

tum triangulum R O Q, est æquale toti circulo radij A E, & totum trilineum R G O Q, est æquale toti excessui, sic trapezium R N X Q, esse æquale armillæ latitudinis V E; & trapezium R G X Q, esse æquale excessui ab armilla comprehenso. Ergo armilla ad excessum, & trapezium triangulare ad trapezium trilineare, habebunt eandem rationem. Tunc, ratio trapezij R N X Q, ad trapezium R G X Q, (de foris sumpto parallelogrammo Y Q) componitur ex ratione illius ad parallelogrammum, & huius ad trapezium R G X Q. Ast ex 2. parte proposit. 9. lib. pri. de Infinit. Parab. est trapezium R N X Q, ad Y Q, vt X O, O Q, ad duplam O Q: & vt O X, O Q, seu vt duæ medietates O X, O Q, ad duplam Q O, sic tot medietates O X, O Q, quotus est numerus gradus spiralis binario auctus, ad tot numero Q O. Ergo R N Y Q, erit ad Y Q, vt illæ tot medietates ad tot Q O. Sed Y Q, est ad R G X Q, ex loc. citat. vt tot Q O, quotus est numerus trilinei vnitate auctus (nempe quotus est numerus spiralis binario auctus) ad Q O, O X, cum alijs terminis proportionis Q O, ad O X, continuatæ ad tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum trilinei vnitate (nempe spiralis binario.) Ergo ratio trapezij triangularis, ad A G X Q, componetur ex ijsdem rationibus. Sed ex ipsis componitur etiam ratio tot medietatum Q O, O X, quotus est numerus spiralis binario auctus, ad Q O, O X, cum illis tot numero terminis. Ergo etiam trape-

trapezium ad trapezium, & consequenter armilla latitudinis V E, erit ad partem excessus dictam, quam comprehendit, vt illæ tot medietates ad illas proportionales. Nempe, vt tot medietates ipsarum E A, A V, quotus est numerus spiralis binario auctus, ad E A, A V, vna cum tot alijs proportionalibus, quæ simul adæquent eundem numerum spiralis binariò auctum.

COROLLARIVM.

Ergo per conuersionem rationis, erit armilla radij V E, ad partem spatij helici quam claudit, nempe ad illam, quæ clauditur recta V E, & curuis I E, I V, vt illæ medietates ad excessum ipsarum supra illas proportionales. Nempe in lineari vt sesquialtera E A, A V, ad excessum vnius medietatis E A, A V, supra tertiam minorem proportionalem. In quadratica, vt excessus E A, A V, supra tertiam, & quartam minores proportiones, &c.

PROPOSITIO VIII.

Circulus ductus concentricus, erit ad partem excessus, quam continet, vt potestas radij circuli maioris eiusdem gradus cum spirali, ad talem partem similis potestatis radij ducti, quæ se habeat ad totam, vt binarium ad numerum spiralis binariò auctum.

In

IN Eodem schemate. Dico circulum radij AV, essem ad AITVA, partem excessus quam claudit, vt potestas EA, eiusdem gradus cum spirali, ad partem similis potestatis AV, quæ se habeat ad totam potestatem AV, vt binarium ad numerum spiralis binario auctum. Nempe in lineari, vt EA, ad $\frac{2}{3}$ AV. In quadratica, vt quadratum EA, ad $\frac{2}{4}$ quadrati AV. In cubica, vt cubus EA, ad $\frac{2}{5}$ cubi AV. Et sic discurrendo.

Triangulum enim NOX, est æquale circulo radij, AV, & trilineum GOX, æquale excessui AITV; ergo triangulum ad trilineum, & circulus ad excessum erunt in eadem ratione. Sed intellecta recta GO, triangulum NOX, est ad triangulum GOX, vt NX, ad GX (nempe vt tota circumferentia VTIV, ad circumferentiam VTI (NX, enim, & GX, sunt æquales illis circumferentijs:) & triangulum GOX, est ad trilineum GOX, ex schol. pri. proposit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. vt numerus trilinei vnitate auctus (nempe vt numerus spiralis binario auctus) ad binarium, nempe, vt GX, ad talem sui partem; seu vt circumferentia ITV, ad talem sui partem. Ergo ex æquali, erit NOX, ad trilineum, & consequenter circulus radij EA, ad partem excessus AITV, vt tota circumferentia radij AV, ad talem partem VTI, quæ se habeat ad ipsam, vt binarium ad numerum binario auctum. Sed vt circumferentia radij AV, ad dictam partem circumferentiæ VTI, sic circumferentia radij EA, ad similem partem circumferentiæ EMS: & cum sit vt circumferentia radij AE, ad EMS, sic potestas EA, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AI, seu AV; vnde est etiam vt circumferentia radij AE, ad talem partem EMS, quæ se habeat ad ipsam, vt binarium ad numerum binario auctum, sic potestas EA, eiusdem gradus cum spirali ad talem partem similis potestatis AV, quæ se habeat ad ipsam, vt binarium ad numerum spiralis binario auctum. Ergo à primo ad vltimum, erit circulus radij AV, ad excessum AITV, vt dicta potestas EA, ad dictam partem similis potestatis AV. Quod erat ostendum.

COROLLARIVM.

Per conuersionem ergo rationis erit circulus radij AV, ad partem spatij, quam claudit, nempe ad AIVA, vt dicta potestas EA, ad excessum ipsius supra dictas partes potestatis similis AV.

SCHOLIVM.

Vt imitaremur Caualerium in lib. 6. Geom. Indi. ostendimus 6. propositionem per indiuisibilia: verum ipsum omnimodè insequentes, illam ostendemus modo Archimedeo, & ipsam demonstrabimus vniuersalius: non modò quia agemus de infinitis spiralibus, cum ipse de vnica egerit dumtaxat, sed etiam quia

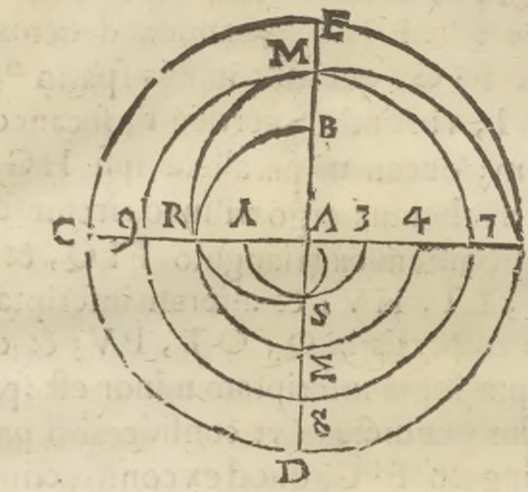
quia vniuersaliter considerabimus trilinea, & non prædictis excessibus æqualia tantum, vt fecit Caualerius. Modus iste ostendendi Archimedeus non modò potest seruari in ista propositione, sed etiam in omnibus alijs sequentibus, in quibus particulariter in spirali lineari ipso vtitur Caualerius; & quidem semper duplici de causa vniuersalius. Verum nos ipsum non adhibebimus nisi in præsenti propositione. In alijs etenim vtemur regali, & facili indiuisibilium via, relinquentes illam archimedeam ijs, qui in rebus geometricis cupiunt excruciari. Verum tamen est, quod si quis optabit ostendere illas propositiones Archimedeè, id ei licebit perficere, attentè considerata sequenti propositione, & ad ipsius instar, sed congruenti modo, operando, & discurrendo.

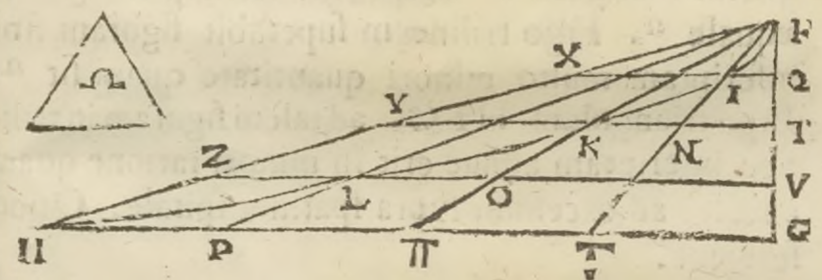
PROPOSITIO IX.

Circulus ad excessum sui supra quodlibet spatium spirale ex prima reuolutione eam habet proportionem, quam habet triangulum circumscriptum trilineo vno gradu altiori spirali, ad ipsum.

Sit quæcunque spiralis ex prima reuolutione ASRMB, cum sibi circumscripto circulo BDCE, & sit quodlibet triangulum rectangulum cum sibi inscripto trilineo FGH, vno gradu altiori gradu spiralis, vt dictum fuit supra. Dico circulum dictum, esse ad excessum ipsius supra spatium

spirale





spirale ASRMBA, vt triangulum FGH, ad trilineum FGH, sibi inscriptum.

Si triangulum non est ad trilineum in eadem ratione cum circulo ad illum excessum, vel est in maiori, vel in minori. Sit primò in minori. Ergo triangulum ad aliquid minus illo trilineo erit in eadem ratione. Sit Ω, excessus quo trilineum superat magnitudinem, ad quam triangulum est in eadem ratione cum circulo ad illum excessum. HG, basis

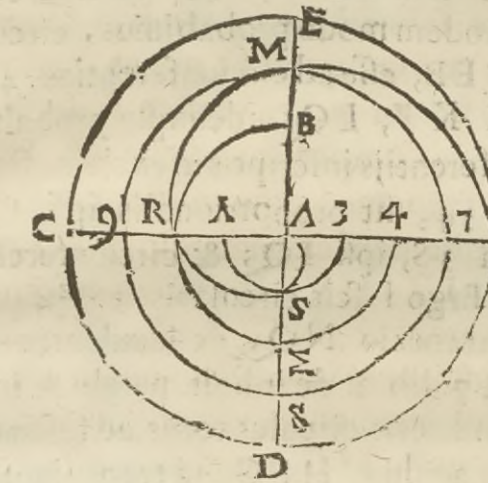
D trian-

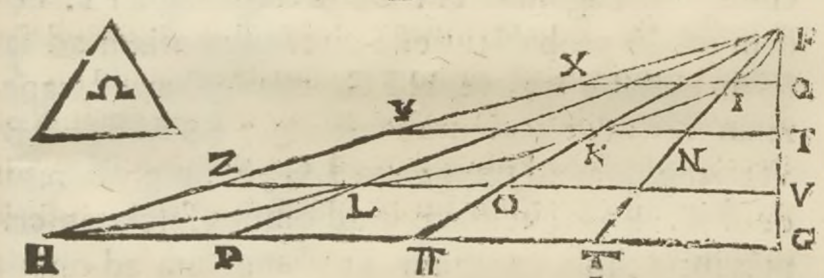
trianguli diuidatur bifariam in π, & partes rursum bifariam in P, r, & hoc semper fiat, donec à vertice F, ductis Fr, Fπ, FP, tandem deueniatur ad triangulum FrG, quod sit minus spatio Ω; & per puncta I, k, L, vbi ductæ à vertice F, secant curuam parabolicam, ducantur parallelæ ipsi HG, vt in schemate. Habemus ergo trilineo circumscriptam figuram constantem ex triangulo FIQ, & ex trapezijs kQ, LT, HV; & alteram inscriptam constantem ex trapezijs NQ, OT, PV; & excessus circumscriptæ supra inscriptam minor est spatio Ω: quia excessus prædictus (vt consideranti patet) æquatur triangulo FrG, quod ex constructione, est æquale Ω. Ergo trilineum superabit figuram sibi inscriptam multo minori quantitate quam sit Ω. Ergo triangulum HFG, ad talem figuram in trilineo inscriptam adhuc erit in minori ratione quam circulus ad excessum supra spatium spirale. Quod seruetur.

Tunc AB, diuidatur similiter in 3, 4, 7, sicuti diuisa est FG, in Q, T, V: & centro A, interuallis A3, A4, A7, describantur circumferentiæ 3S, 4ΞR, 789M, secantes spiralem in S, R, M, per quæ transeant ASD, ARC, AME, productæ ad circumferentiam vsque.

Quoniam ergo circumferentia BDCEB, ad circumferentiam 789M, est ex proposit. 3. vt potestas BA, vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem A7; & AB, GF, sectæ sunt pro-

por-





portionaliter in 7, V; vndè est vt potestas BA, vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem A7, sic similis potestas GF, ad similem potestatem FV; ergo & circumferentia BDCEB, erit ad circumferentia 789M, vt potestas GF, vno gradu altior potestate spiralis (nempe eiusdem gradus cum trilineo, quod supponitur vno gradu altius spirali) ad similem potestatem FV. Sed ex natura trilinei, est vt prædicta potestas GF, ad potestatem FV,

 sic

ſic H G, ad L V. Ergo & vt H G, ad L V, ſic circumferentia B D C E B, ad circumferentiam 7 8 9 M. Eodem modo probabimus, circumferentiam B D C E B, eſſe ad circumferentias 4$^{\Sigma}$R, 3 S, vt H G, ad K T, L Q; idemque probabimus de alijs circumferentijs inſcriptis in exceſſu, ſi adeſſent. Cum ergo 34, ſit proportionalis ipſi Q T; circumferentia 3 S, ipſi I Q; & circumferentia 4$^{\Sigma}$, ipſi N T: Ergo faſcia circularis 3 S$^{\Sigma}$4, erit proportionalis trapezio N Q, ex luculenter explicatis in propoſit. 7. lib. 2. de infinit. parab. & in ſcholijs eiuſdem; vnde erit circulus totus ad faſciam prædictam, vt triangulum H F G, ad trapezium I T. Eodem modo probabitur eſſe circumferentiam ad faſciam 4$^{\Sigma}$R 9 8 7, vt H F G, triangulum ad trapezium k V; & circulum ad faſciam 7 8 9 M E C D B, vt triangulum ad trapezium L G; & ſic probaretur de alijs. Ergo circulus erit ad omnes faſcias inſcriptas intra illum exceſſum, vt triangulum ad omnia trapezia inſcripta intra trilineum. Sed triangulum probatum eſt ſupra, eſſe ad omnia trapezia inſcripta in trilineo, in minori ratione, quam circulus ad exceſſum illum. Ergo circulus ad omnes faſcias inſcriptas intra exceſſum, erit in minori ratione, quam ad exceſſum ipſum. Quod implicat. Quare &c.

Sed nec etiam erit triangulum in maiori ratione ad trilineum, quam circulus ad exceſſum. Nam ſic, triangulum ad aliquid maius trilineo erit in eadem ratione cum circulo ad exceſſum. Sit exceſſus rurſum

$^{\Omega}$, vt

$^{\Omega}$, vt triangulum ſit ad trilineum cum $^{\Omega}$, in eadem ratione cum circulo ad exceſſum. Diuidatur iterum H G, bifariam, & partes iterum bifariam, & conſtituantur triangula, vt factum eſt prius, vt vnum triangulorum v. g. F$^{\Gamma}$G, minus ſit ſpatio $^{\Omega}$. Ergo triangulum ad trilineum ſimul cum triangulo F$^{\Gamma}$G, erit adhuc in maiori ratione quam circulus ad exceſſum. Si ergo factis circumſcriptione, & inſcriptione vt in ſchemate: patebit triangulum I F Q, cum trapezijs k I, L k, H L, quæ ſunt æqualia exceſſui figuræ circumſcriptæ ſupra trapezia N Q, O T, P V, inſcripta, æqualia eſſe triangulo F$^{\Gamma}$G. Ergo figura circumſcripta ſuperabit inſcriptam ſpatio minori $^{\Omega}$. Ergo figura circumſcripta ſuperabit trilineum multò minori quantitate. Ergo triangulum ad figuram circumſcriptam erit in multo maiori ratione, quam circulus ad exceſſum. Sed eodem modo, quo factum fuit ſupra, probabimus, circulum ad ſectorem S A 3, eſſe vt triangulum ad triangulum I F Q: & circulum ad faſciam 3 4$^{\Sigma}$R$^{\Lambda}$S 3, vt triangulum H F G, ad trapezium k Q: & ſic de alijs faſcijs, & trapezijs circumſcriptis exceſſui prædicto, & ipſi trilineo. Ergo circulus ad totam figuram exceſſui circumſcriptam, erit vt triangulum ad figuram circumſcriptam trilineo. Ergo circulus erit in maiori ratione ad figuram circumſcriptam exceſſui, quam ad ipſum exceſſum. Quod iterum implicat. Ergo &c. Quod &c.

CO-

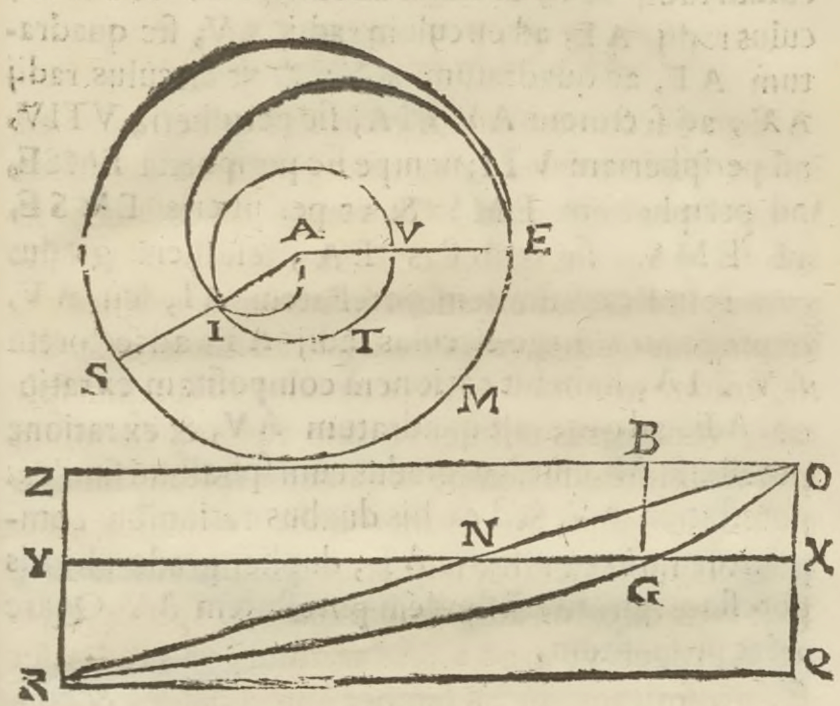
COROLLARIVM.

Ergo per conuerſionem rationis, erit circulus ad ipſum ſpatium ſpirale, vt triangulum ad exceſſum ipſius ſupra trilineum. Cum ergo oſtenſum ſit in ſchol. 1. propoſit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. eſſe triangulum HFG, ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum: erit & circulus ad ſpatium ſpirale, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad ipſum vnitate minutum: nempe vt numerus ſpiralis binario auctus ad ipſum numerum ſpiralis (numerus enim trilinei ſuperat ſemper numerum ſpiralis vnitate.) Erit ergo circulus ad primum ſpatium ſpirale, vt 3. ad 1. Ad ſec. vt 4. ad 2. Ad tertium, vt 5. ad 3. Et ſic in infinitum, auctis ſemper antecedente, & conſequente vnitate.

PROPOSITIO X.

Si in ſpiralem quamcunque ex prima reuolutione ortam ducatur linea, & centro initio, interuallo illa linea deſcribatur circulus. Erit primus circulus ſpirali circumſcriptus, ad ſectorem circuli deſcripti contentum ducta linea, & portione abſciſſa à linea, quæ eſt initium reuolutionis in præcedentia, vt poteſtas ſemidiametri primi circuli duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem radij alterius circuli.

Eſto



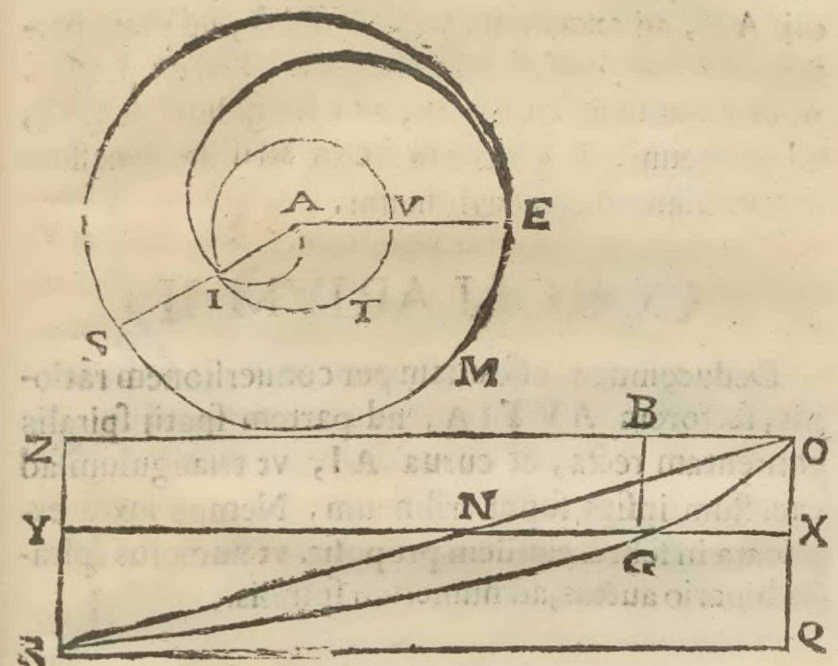
Esto quælibet ſpiralis ex prima reuolutione orta AIE, in qua ducta vbilibet ab initio A, linea AI, centro A, interuallo AI, ſit deſcriptus circulus VITV. Dico circulum radij AE, eſſe ad ſectorem AVTIA, vt poteſtas EA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AI, ſeu AV. Nempe in lineari, vt cubus ad cubum. In quadratica, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum &c.

Nam circulus radij AE, ad ſectorem AVTIA, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad circulum

culum radij AV, & huius ad ſectorem. Sed vt circulus radij AE, ad circulum radij AV, ſic quadratum AE, ad quadratum AV: & vt circulus radij AV, ad ſectorem AVTIA, ſic peripheria VTIV, ad peripheriam VTI; nempe ſic peripheria EMSE, ad peripheriam EMS: & vt peripheria EMSE, ad EMS, ſic poteſtas EA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AI, ſeù AV, ex propoſit. 2. Ergo circulus radij AE, ad ſectorem AVTIA, habebit rationem compoſitam ex ratione AE, ad quadrati quadratum AV, & ex ratione poteſtatis AE, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AV. Sed ex his duabus rationibus componitur ratio poteſtatis AE, duplici gradu altioris poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AV. Quare patet propoſitum.

SCHOLIVM.

Cum in ſchol. propoſit. 6. probatum ſit, eſſe exceſſum circuli radij AE, ſupra ſpatium ſpirale, ad ſui partem contentam recta AV, & curuis AI, ITV, vt poteſtas pariter EA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AV. Erit etiam prædictus exceſſus ad talem ſui partem, vt circulus radij AE, ad ſectorem AVTIA. Ex qua analogia, ſeù ſimilitudine proportionum licebit varia veluti corollaria deducere.



COROLLARIVM I.

Deducemus enim primo, quod intellecto trilineo parabolico RGOQ, vno gradu altiore gradu ſpiralis, cum ſibi circumſcripto triangulo ROQ; erit triangulum ad trilineum, vt ſector AVTIA, ad exceſſum ipſius ſupra portionem ſpatij ſpiralis comprehenſam recta, & curua AI. Quod patet, quia cum ſit totus circulus radij AE, ad ſectorem AVTIA, vt exceſſus circuli radij AE, ſupra ſpatium ſpirale

ad partem ipsius comprehensam recta AV, & curuis VTI, IA: erit etiam permutando, circulus radij AE, ad excessum, vt AVTIA, ad illam partem excessus, quam comprehendit. Sed ex propos. 9. est circulus ad excessum, vt triangulum ROQ, ad trilineum. Ergo etiam sector ad illum excessum erit, vt triangulum ad trilineum.

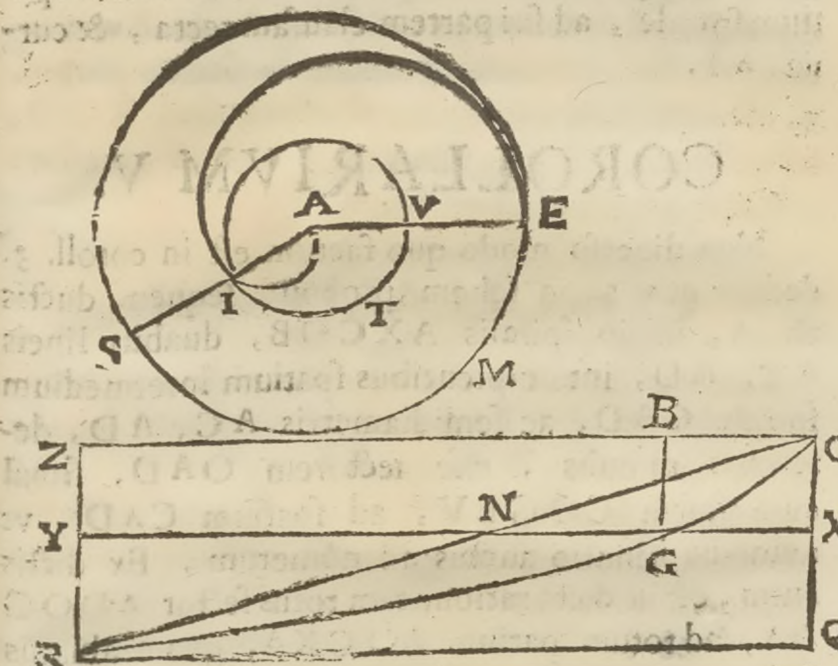
COROLLARIVM II.

Deducemus 2. esse etiam per conuersionem rationis, sectorem AVTIA, ad partem spatij spiralis contentam recta, & curua AI, vt triangulum ad excessum ipsius supra trilineum. Nempe iuxta explicata in schol. eiusdem proposit. vt numerus spiralis binario auctus, ad numerum spiralis.

COROLLARIVM III.

Deducemus 3. etiam armillam circularem cuius latitudo SI, vel VE, vna cum sectore AVIA, esse ad spatium comprehensum rectis AI, AE, & curua EI, vt numerus binario auctus, ad numerum. Cum enim probatum sit, esse vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, nempe vt totus circulus ad totum spatium, sic ablatum sectorem AVTIA, ad ablatum spatium: erit & reliquum ad reliquum vt totum ad totum.

CO-



COROLLARIVM IV.

Deducemus 4. esse totum spatium spirale ad portionem sui contentam recta, & curua AI, vt potestas AE, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AI, seù AV. Cum enim probatum sit, sic esse totum circulum ad totum spatium, vt sector AVTIV, ad partem clausam recta, & curua AI. Erit etiam permutando, vt totus circulus ad sectorem, nempe ex præsenti proposit. vt po-

E 2 testas

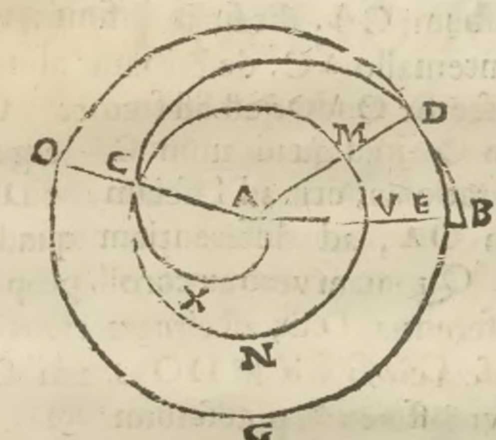
testas A E, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem A I, seù A V, sic totum spatium spirale, ad sui partem clausam recta, & curua A I.

COROLLARIVM V.

Non diuerso modo quo factum est in coroll. 3. deducemus 5. in schem. proposit. sequen. ductis ab A, initio spiralis A X C D B, duabus lineis A C, A D, intercipientibus spatium intermedium spirale C A D, ac semidiametris A C, A D, descriptis circulis, esse sectorem O A D, simul cum fascia C O G E V, ad spatium C A D, vt numerus binario auctus ad numerum. Ex dictis enim, est in dicta ratione tam totus sector A D O G E A, ad totum spatium A D C X A, quam ablatus sector A C N V A, ad ablatum spatium A C X. Ergo & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum: nempe in dicta ratione.

PROPOSITIO XI.

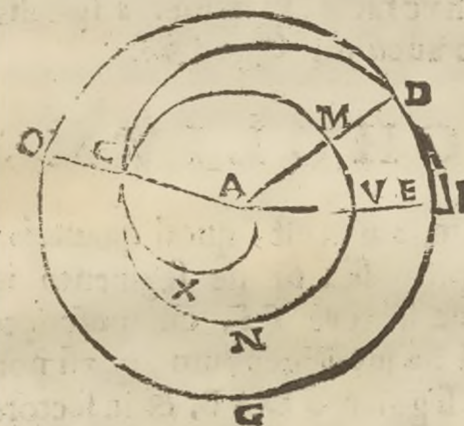
Si ab initio cuiuscunque spiralis ducantur duæ lineæ terminatæ ad duo puncta intermedia spiralis, & centro initio, interuallo maiori ductarum describitur circulus. Sector circumscriptus spatio spirali à duabus ductis clauso, erit ad ipsum, vt factum sub quadrato maioris ductæ in differentiam potestatum ductarum eiusdem gradus cum spirali, ad sui tales partes, & facti sub differentia quadratorum ductarum in potestatem minoris eiusdem gradus cum spirali, quæ se habeant ad hæc facta vt numerus spiralis ad numerum auctum binario.



Esto quælibet spiralis A X C D B, & ab initio A, sint ductæ A C, A D, & centro A, interuallo A D, maiori sit descriptus circulus, &c. Dico sectorem O A D, esse ad segmentum spirale C A D, vt factum sub quadrato O A, in differentiam potestatem O A, A C, eiusdem gradus cum spirali, ad sui tales partes, & facti sub differentia quadratorum O A, A C, in potestatem A C, eiusdem gradus cum spirali simul, quæ se habeant ad hæc facta, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. V. g. in lineari, vt factum sub quadrato O A, in O C, ad ⅓ ipsius, & facti sub differentia quadratorum O A, A C, in A C. In quadratica, vt factum sub quadra-

to OA, in differentiam quadratorum OA, AC, ad $\frac{2}{4}$, huius, & facti sub eadem differentia in quadratum CA. In cubica, vt factum sub quadrato OA, in differentiam cuborum OA, AC, ad $\frac{3}{5}$ huius facti, & facti sub differentia quadratorum OA, CA, in cubum CA. Et sic in infinitum. Centro etiam A, interuallo AC, describatur alius circulus. Quoniam sector OAD, est ad sectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA: ergo per conuersionem rationis, erit ad fasciam MDOC, vt quadratum OA, ad differentiam quadratorum, OA, AC. Quoniam verò ex coroll. proposit. prim. est circumferentia DO, ad circumferentiam OGE (nempe fascia circularis MDOC, ad fasciam CO GEV,) vt differentia potestatum AD, seù OA, & AC, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AC: & sector OAD, ad fasciam CO GEV, habet rationem compositam ex ratione ipsius ad fasciam MDOC, & huius ad fasciam CO GEV. Ergo sector ad fasciam COGEV, erit in ratione composita ex ratione quadrati OA, ad differentiam quadratorum OA, AC, & ex ratione differentiæ potestatum OA, AC, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem CA. Ergo sector erit ad talem fasciam, vt factum sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub differentia quadratorum OA, CA, in potestatem CA, eiusdem gradus cum spirali. Et conuertendo, & componendo, erit fa-

scia



scia cum sectore ad eundem sectorem, vt factum sub differentia quadratorum OA, CA, in potestatem CA, eiusdem gradus cum spirali, cum facto sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, ad hoc secundò factum. Et rursum conuertendo, erit sector ad fasciam cum sectore, vt secundo factum ad ambo facta. Sed ex coroll. 5. proposit. anteced. sector DAO, cum fascia COGEV, est ad spatium spirale CAD, vt numerus spiralis binario auctus ad numerum spiralis; nempe vt ambo illa facta ad tales partes ipsorum, quæ sint ad ipsa facta, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Ergo ex æquali, sector OAD, erit ad spatium spirale CAD, vt factum sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, ad tales partes ipsius, & facti sub differentia quadratorum OA, CA, & sub pote-

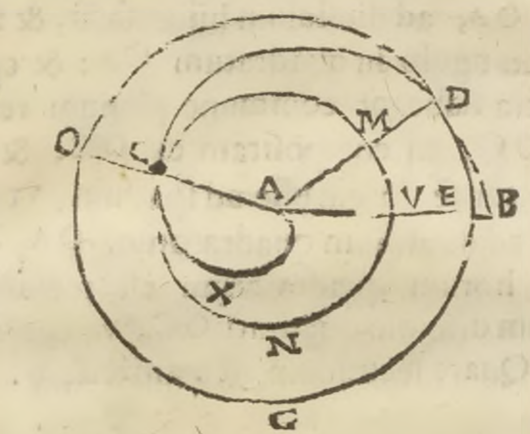
pote-

potestate CA, eiusdem cum spirali gradus; quæ se habeant ad hæc facta, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Notandum tamen est, quod quamuis supradicta propositio proposita sit de segmento intermedio CAD, & de sectore EI, circumscripto, hoc tamen non est ita intelligendum, quasi non verificetur etiam in segmento DAB, & in sectore EI circumscripto. Simili enim discursu obteniretur intentum.

Sed in prima, & secunda spirali faciliorem rationem sectoris ad spatium possumus, ex dictis, assignare. In prima enim spirali, erit sector ad spatium, vt quadratum AD, seù OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC. In secunda autem, erit vt idem quadratum OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{2}{4}$ seù cum dimidio quadrati OC. Primum patet: quia cum ex regula generali deducatur, sectorem esse ad spatium, vt factum sub OC, in quadratum OA, ad $\frac{1}{3}$ huius, & facti sub differentia quadratorum OA, AC, in AC; nempe facti sub OC, in compositam ex OC, & dupla CA, & sub CA: & cum in omnibus prædictis solidis sit vnum commune latus, nempe OC: sequitur sectorem esse ad spatium, vt quadratum OA, ad $\frac{1}{3}$ ipsius, & rectanguli sub CA, & sub composita ex OC, & dupla CA.



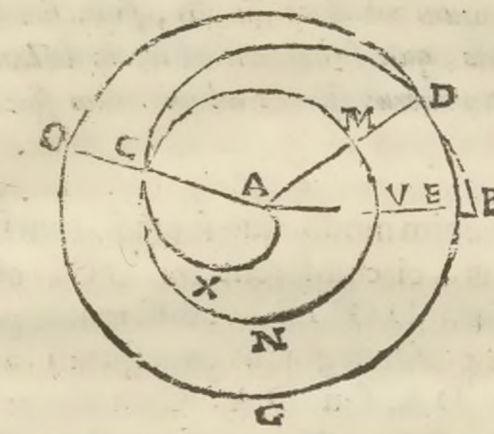
CA. Cum vero hoc rectangulum sub CA, & sub composita ex OC, & dupla CA, sit æquale duplo quadrato CA, & rectangulo OCA. Sequitur sectorem esse ad spatium, vt quadratum OA, ad $\frac{1}{3}$ eiusdem, simul cum $\frac{1}{3}$ duorum quadratorum CA, & rectanguli OCA. Sed $\frac{1}{3}$ horum planorum est rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC. Quia quadratum OA, diuiditur in quadrata OC, CA, & in duo rectangula OCA. Colligendo ergo omnia hæc plana, habebimus tria quadrata CA; tria rectangula OCA; & quadratum OC. Quorum $\frac{1}{3}$ est vnum rectangulum OCA, cum vno quadrato CA (nempe rectangulum OAC) cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC. Quare patet primum.

Ferè eodem modo patebit secundum. Quia cum sector sit ad spatium, vt factum sub OC, in compositam ex OC, & dupla CA (hoc enim rectangu-

lum est differentia quadratorum O A, A C) & ſub quadrato O A, ad dimidium huius facti, & facti ſub eodem rectangulo in quadratum C A: & cum hæc omnia facta habeant commune planum rectangulum ſub O C, in compoſitam ex O C, & duplā C A: ſequitur ſectorem eſſe ad ſpatium, vt quadratum O A, ad dimidium quadratorum O A, A C. Sed dimidium horum quadratorum eſt rectangulum O A C, cum dimidio quadrati O C, vt conſideranti patebit. Quare ſecundum eſt manifeſtum.

SCHOLIVM II.

Ex dictis ergo in ſuperiori ſcholio, patet in prima, & ſecunda ſpirali, ſectorem ad ſpatium ſeruare hunc ordinem, vt ſit vt quadratum maioris ductæ, ad rectangulum ſub ductis, vna cum tali parte quadrati differentiæ ductarum, quæ ſit ad ipſum, vt numerus ſpiralis ad numerum binariò auctum; nempe ad $\frac{1}{3}$, & ad dimidium, nempe ad $\frac{2}{4}$. Forſitan ergo quis poſſet cogitare talem proportionem ſectoris ad ſpatium ſeruare hunc pulcherrimum ordinem, vt in tertia ſit, vt quadratum O A, ad rectangulum O A C, cum $\frac{3}{5}$ quadrati O C. In quarta cum $\frac{4}{5}$ quadrati O C. Et ſic in infinitum. Sed qui ſic putaret nimis à ſcopo aberraret, ſicuti patebit in numeris experienti in tertia ſpirali. Supponamus enim facilitatis gratia, O A, eſſe duplam A C. Quoniam cubus O A, eſſet 8, & cubus C A, 1: ergo differentia cuborum O A,



A C, eſſet 7. Cum ergo quadratum O A, ſit 4. Ergo factum ſub quadrato O A, & ſub differentia cuborum O A, A C, eſſet 28. Pariter factum ſub differentia quadratorum O A, A C, nempe ſub 3. & ſub cubo C A, nempe ſub 1, eſſet 3. Ergo ſector eſſet ad ſpatium vt 28. ad tria quinta 31. nempe ad 18. $\frac{3}{5}$ nempe, vt 4. ad 2. & $\frac{23}{35}$. Cum tamen quadratum O A, ſit ad rectangulum O A C, cum $\frac{3}{5}$ quadrati O C, vt 4. ad 2. cum $\frac{3}{5}$ nempe cum $\frac{}{35}$. Quare &c.

Sed proportio ſectoris ad ſpatium prædictum poteſt alio modo, & compendioſius, patefieri. Quapropter ſit.

PROPOSITIO XII.

Idem ſector ad idem ſegmentum, erit vt idem antecedens

ad tales partes differentiæ poteſtatum ductarum duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſupra ſimilem poteſtatem minoris, quæ ſe habeant ad totam dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum ſpiralis binario auctum.

EOdem enim modo, quo ſupra factum fuit, oſtendemus, circumferentiam DO, eſſe ad circumferentiam DOGE, vt differentia poteſtatum DA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem DA, ſeù OA. Cum autem ſit, vt circumferentia DO, ad circumferentiam DOE, ſic ſector ADO, ad ſectorem ADOEA; & pariter cum ſit, vt prædicta differentia ad prædictam poteſtatem OA, ſic factum ex dicta differentia in quadratum OA, ad poteſtatem OA, duplici gradu altiorem poteſtate ſpiralis. Ergo ſector DAO, erit ad ſectorem ADOEA, vt factum ſub dicta differentia poteſtatum OA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum OA, ad poteſtatem OA, duplici gradu altiorem poteſtate ſpiralis. At ſector ADOEA, eſt ad ſpatium ſpirale AXCDA, vt numerus ſpiralis binario auctus, ad numerum, ex coroll. 2. propoſit. 10. nempe vt poteſtas OA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad tales partes ſui, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo ex æquali, ſector DAO, erit ad AXCDA, vt factum ſub prædicta differentia in quadratum OA, ad dictas partes poteſtatis OA. Rurſum, cum ſpatium ſpirale AXCDA, ſit ad ſpatium AXCA, vt poteſtas DA, ſeù OA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem CA, ex coroll. 4. propoſit. 10. nempe, vt tales partes talis poteſtatis OA, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad ſimiles partes poteſtatis CA; erit per conuerſionem rationis, AXCDA, ad ACD, vt tales partes poteſtatis OA, ad exceſſum ipſarum ſupra ſimiles partes poteſtatis CA. Quare rurſum ex æquali, erit ſector DAO, ad ſegmentum CAD, vt factum ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum OA, ad tales partes differentiæ poteſtatum OA, AC, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad totam differentiam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Quod &c.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſit. & ex anteced. quamuis extra intentum, colligemus, differentiam poteſtatum OA, AC, cuiuslibet gradus, æqualem fore facto ſub quadrato OA, in differentiam poteſtatum OA, AC, dupli gradu inferiorum, & facto ſub differentia quadratorum OA, AC, in poteſtatem CA, itidem duplici gradu inferiorem. V.g. differentia quadratoquadratorum OA, AC, erit æqualis facto ſub quadrato OA, & ſub differentia quadratorum OA, AC,

AC, vna cum facto sub dicta differentia quadratorum OA, AC, in quadratum AC. Quod vtique est manifestum. Nam ex prop. 11. sector OAD, est ad spatium CAD, vt factum sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, AC, eiusdem gradus cum spirali, ad sui talem partem, & facti sub differentia quadratorum OA, AC, & sub potestate AC, eiusdem gradus cum spirali, quæ se habeat ad hæc, vt numerus ad numerum binario auctum. Ex præsenti proposit. idem sector OAD, est ad idem spatium CAD, vt idem factum sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, AC, eiusdem gradus cum spirali ad talem partem differentiæ potestatum OA, AC, duplici gradu altiorum potestate spirali, quæ se habeat ad dictam differentiam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo ambo consequentia harum proportionum erunt æqualia. Cumque sint similes partes illarum magnitudinum cuius sunt partes: etiam integræ magnitudines erunt æquales. Differentia ergo potestatum OA, AC, dupli gradu altiorũ gradu spiralis, erit ęqualis facto sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, AC, eiusdem gradus cũ spirali, vna cum facto sub differẽtia quadratorum OA, AC, in potestatem CA, eiusdem gradus cũ spirali. Quod vtique illud idem est, quod supra dictum fuit.

SCHOLIVM.

Sed sicuti in schol. prim. proposit. anteced. depressi fuerunt termini proportionis dictæ primæ, & secundæ spiralis ad terminos inferiores, sic licebit ipsos in præsenti deprimere, & compendiosiores rationes assignare, vt ibidem factum fuit. An verò necesse sit in alijs spiralibus altiorum graduum retinere proportiones illarum potestatum, adeo vt nullatenus liceat ipsas deprimere, non videtur affirmandum. Sed quomodo possint deprimi, videat lector proprio Marte. Saltem enim ex doctrinis Francisci Vietæ explicatis in notibus prioribus ad Logisticen Speciosam à proposit. 14. infra, colliget posse dictas proportiones deprimi vno gradu. Colligitur enim ex ibidem ab ipso ostensis. Consectarium suum vniuersale, quod habet post proposit. 24. Quod *Differentia potestatum si adplicetur ad differentiam laterum orientur singularia homogenea quibus constat potestas gradus proxime inferioris adgregati ipsorum laterum, semel sumpta. Et è contra.* V. g. si cubus OA, minus cubo AC, adpliceturad OC, differentiam laterum OA, AC, orientur quadratum OA, rectangulum OAC, & quadratum AC, simul, & semel sumpta; quæ plana sunt omnia singularia plana potestatis vnius gradus inferioris, nempe quadrati, adgregati laterum OA, AC. Et sic in alijs potestatibus. Cum ergo proportio sectoris OAD, ad spatium CAD, sit eadem cum ratione facti sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, AC, eiusdem gradus cum spirali, ad partes explicatas differentiæ potestatum OA, AC, duplici gradu altiorum potestate spiralis: patet ambos

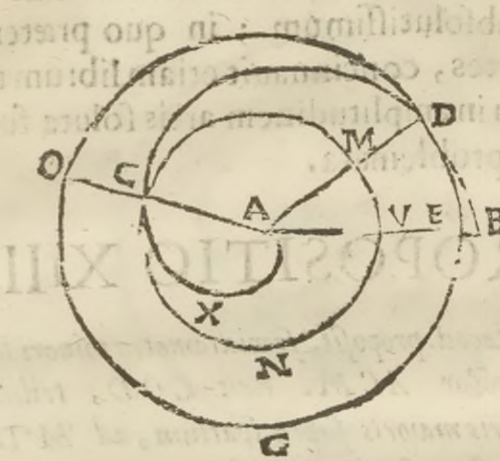
ambos terminos huius proportionis posse adplicari ad OC, differentiam laterum. Sed hæc omnia melius percipientur exemplificando in tertia spirali. In hac sector OAD, est ad spatium CAD, vt factum sub quadrato OA, in differentiam cuborum OA, AC, ad $\frac{3}{5}$ differentiæ quadratocuborum OA, AC. Si adplicetur ad OC, differentiam laterum differentia cuborum OA, AC; orietur summa planorum singulariter, quibus constat quadratum adgregati laterum OA, CA, simul sumptorum; nempe quadratum OA, rectangulum OAC, & quadratum AC.

Si verò adplicetur ad eandem OC, differentia quadratocuborum OA, AC; orietur summa planoplanorum singulariter, quibus constat quadratoquadratum laterum adgregati OA, AC, simul sumptorum, nempe.

Quadratoquadratum OA. Plus cubus OA, in AC. Plus quadratum OA, in quadratum AC. Plus OA, in cubum AC. Plus quadratoquadratum AC.

Ergo in spirali cubica erit sector OAD, ad spatium spirale CAD, vt quadratoquadratum OA. Plus cubus OA, in AC. Plus quadratum OA, in quadratum CA. ad $\frac{3}{5}$ planoplanorum supra ennumeratorum.

Ex quibus videtur posse deduci aliam regulam generalem assignandi rationem sectoris OAD, in quacunque spirali, ad spatium spirale CAD. Et hæc erit,



erit, quod sit vt factum sub quadrato OA, in omnes singulares partes potestatis adgregati OA, AC, vno gradu inferioris potestate spiralis, ad omnium singularium partium potestatis adgregati tales partes OA, AC, vno gradu superioris potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsas, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Sed hæc, & similia compendia, vt diximus, lector proprijs adinueniet viribus, si operibus Analystarum aliquando incubuerit. Quamplures etenim adinueniuntur, qui egregiè, & cum summa laude in hac materia scripsere; sed omnibus Colophonem imponet Excellentissimus Geometra Carolus Rinaldinus Serenissimi Magni Principis Etruriæ Mathematicus in quodam magno opere, quod iam exantlauit, quodque in posterum, immo quam primum, typis committet. Quamplurima etenim vir ille egregius tum philosophica, tum mathe-

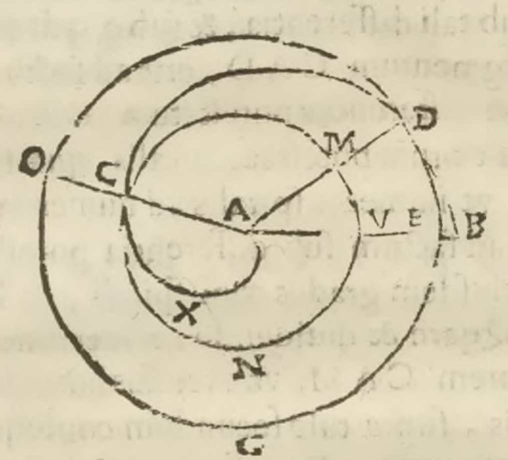
thematica molitus eſt: ſed inter hæc extat opus algebricum abſolutiſſimum ; in quo præter omnes Analyſis partes, concinnauit etiam librum non paruum, in quo in amplitudinem artis ſoluta fuere plus quam 300. problemata.

PROPOSITIO XIII.

Si in ſpatio anteced. propoſit. ſemidiametro minori linea, inſcribatur ſector ACM. Erit COD, trilineum exceſſus ſectoris maioris ſupra ſpatium, ad MDC, trilineum exceſſum ſpatij ſupra ſectorem minorem, vt exceſſus facti ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali in quadratum OA, ſupra tales partes differentiæ poteſtatum OA, CA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad eundem numerum binario auctum, ad exceſſum prædictarum partium differentiæ poteſtatum OA, CA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſupra factum ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum CA.

V. G. in ſpirali lineari, erit trilineum ODC, ad trilineum CDM, vt exceſſus facti ſub OC, in quadratum OA, ſupra tertiam partem differentiæ cuborum OA, AC, ad exceſſum talis tertiæ partis huius differentiæ, ſupra factum ſub OC, in quadratum CA. In quadratica, vt exceſſus facti ſub differentia quadratorum OA, CA, in quadratum

tum



tum OA, ſupra $\frac{2}{4}$ differentiæ quadratoquadratorum OA, CA, ad exceſſum harum ſupra factum ſub differentia quadratorum OA, AC, in quadratum CA. Et ſic in cæteris in infinitum.

Quoniam enim ſector ODA, eſt ad ſegmentum CAD, ex propoſit. anteced. vt factum ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, & ſub quadrato OA, ad talem partem differentiæ poteſtatum OA, CA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeat ad ipſam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum: ergo & diuidendo, trilineum ODC, erit ad ſegmentum CAD, vt exceſſus antecedentis prædicti ſupra dictum conſequens, ad ipſum. Aſt, quoniam ſector ODA, eſt ad ſectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA; nempe vt factum ſub quadrato OA, in differentiam poteſta-

 tum

tum O A, C A, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub tali differentia, & ſub quadrato C A. Ergo & ſegmentum C A D, erit ad ſectorem C A M, vt partes differentiæ poteſtatum O A, C A, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad factum ſub differentia poteſtatum O A, C A, eiuſdem gradus cum ſpirali, & ſub quadrato C A. Quare & diuidendo, erit trilineum C D M, ad ſectorem C A M, vt exceſſus huius ſecundi antecedentis, ſupra tale ſecundum conſequens, ad ipſum conſequens. Ergo facilè concludemus ex æquali, eſſe O C D, ad C D M, vt exceſſus primi antecedentis prædicti ſupra primum conſequens, ad exceſſum ſecundi antecedentis ſupra ſecundum conſequens. Quod &c.

SCHOLIVM.

Sed quoniam in ſuperioribus in duabus primis ſpiralibus compendioſius oſtenſa eſt ratio ſectoris O A D, ad ſpatium C A D, compendioſius etiam oſtendemus in prima ſpirali, eſſe ODC, ad CDM, vt C A, cum $\frac{2}{3}$ O C, ad C A, cum $\frac{1}{3}$ O C. Quod ſic patebit. Quia cum probatum ſit in ſchol. 2. poſit. 11. ſectorem O A D, eſſe ad ſegmentum C A D, vt quadratum O A, ad rectangulum O A C, cum $\frac{1}{3}$ quadrati O C. Ergo diuidendo, erit O D C, ad C A D, vt rectangulum O C A, cum $\frac{2}{3}$ quadrati O C, ad rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati O C (illis enim planis quadratum O A, excedit rectangulum O A C, cum $\frac{1}{3}$ quadrati O C.) Pariter, cum ſector O D A, ſit ad ſectorem C A M, vt quadratum O A, ad quadratum C A. Ergo & ſpatium C A D, erit ad ſectorem C A M, vt rectangulum O A C, cum $\frac{1}{3}$ quadrati O C, ad quadratum C A. Et diuidendo, erit C D M, ad C A M, vt rectangulum O C A, cum $\frac{1}{3}$ quadrati C O, ad quadratum C A. Facile ergo concludetur, O D C, eſſe ad C D M, vt rectangulum OCA, cum $\frac{2}{3}$ quadrati O C, nempe cum rectangulo ſum O C, & ſub $\frac{2}{3}$ O C, ad rectangulum O C A, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC, nempe cum rectangulo ſub OC, & ſub $\frac{1}{3}$ OC. Cum ergo omnia hæc rectangula habeant commune latus OC, erit ODC, ad CDM, vt CA, cum $\frac{2}{3}$ OC, ad CA, cum $\frac{1}{3}$ OC.

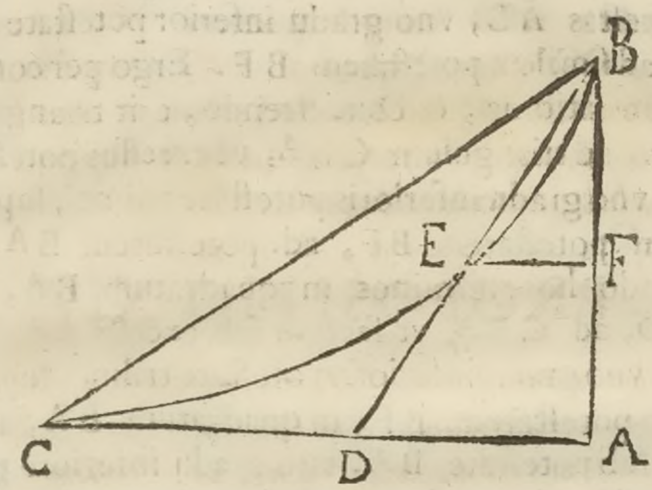
In ſecunda autem ſpirali oſtendemus eodem modo, ODC, & CDM, æqualia eſſe. Quare ſequitur CD, portionem ſpiralis quadraticæ eſſe veluti dimetientem faſciæ O D M C. Quod ſic patebit. Quia cum in ſchol. citat. oſtenſum fuerit, ſectorem eſſe ad ſpatium, vt quadratum OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{1}{2}$ quadrati CO. Ergo diuidendo, ODC, erit ad CAD, vt rectangulum OCA, cum dimidio quadrati OC, ad rectangulum OAC, cum dimidio quadrati OC. Sed pariter probabimus diuidendo, CDM, eſſe ad CAM, vt rectangulum OCA, cum dimidio quadrati OC, ad quadratum CA. Vnde facile

facile concludemus, ODC, esse ad CDM, vt rectangulum OCA, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC, ad rectangulum OCA, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC; nempe vt æquale, ad æquale. Quod &c. Sed etiam in alijs spiralibus poterit prædicta ratio aliqualiter deprimi. Sed videat lector modum depressionis.

PROPOSITIO XIV.

Si cuilibet trilineo à primo, secto vt in proposit. 5. sit circumscriptum triangulum. Erit triangulum pars totius, cuius latus non est diameter trilinei, ad portionem excessus ipsius supra portionem trilinei à se comprehensam, vt factum sub excessu potestatis diametri trilinei vno gradu inferioris potestate trilinei, supra similem potestatem diametri trilinei ad verticem, in quadratum diametri trilinei, ad tales partes excessus potestatis diametri trilinei vno gradu altioris potestate trilinei supra similem potestatem trilinei ad verticem, quæ ad talem excessum se habeant vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum vnitate auctum.

HÆc proposit. est 24. lib. prim. de Infinit. Parab. In schemate ergo proposit. 5. ducatur CB. Dico triangulum CBD, esse ad spatium CBEC, comprehensum à rectis CB, BE, & à curua CE, vt factum sub excessu potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei, supra similem potestatem BF, in quadratum BA, ad tales partes exces-

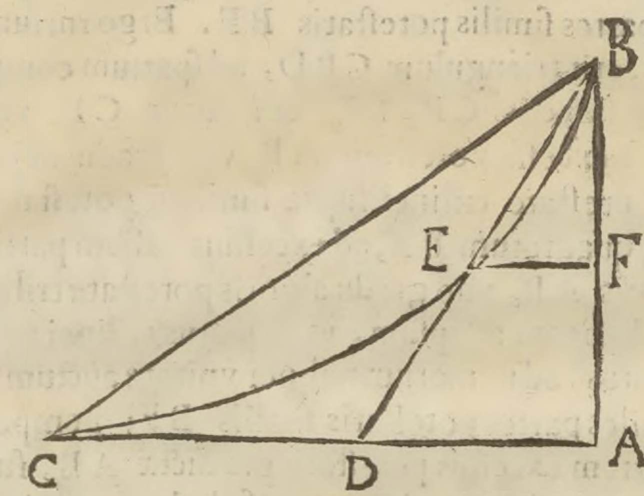


excessus potestatis AB, vno gradu superioris potestate trilinei, supra similem potestatem BF, quæ se habeant ad talem excessum, vt numerus trilinei vnitate minutus ad numerum trilinei vnitate auctum. V. g. in trilineo quadratico, erit vt factum sub FA, in quadratum BA, ad tertiam partem excessus cubi BA, supra cubum BF. In cubico, vt factum sub excessu quadrati BA, supra quadratum BF, in quadratum BA, ad $\frac{2}{4}$ excessus quadratoquadrati AB, supra quadratoquadratum BF. In quadratoquadratico, vt factum sub excessu cubi AB, supra cubum BF, in quadratum BA, ad $\frac{3}{5}$ excessus quadratocubi AB, supra quadratocubum BF. Et sic in infinitum.

Quoniam enim ex proposit. 5. est CA, ad AD, nem-

nempe triangulum CBA, ad triangulum DBA, vt potestas AB, vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem BF. Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit triangulum CBD, ad triangulum CBA, vt excessus potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei, supra similem potestatem BF, ad potestatem BA. Et ducendo hos terminos in quadratum BA, erit CBD, ad CBA, vt factum sub excessu potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei supra similem potestatem BF, in quadratum BA, ad factum sub potestate BA, vno gradu inferiore potestate trilinei in quadratum BA; nempe ad potestatem BA, vno gradu superiorem potestate trilinei. At triangulum CBA, est ad excessum ipsius supra trilineum, nempe ad spatium contentum à recta, & curua CB, vt numerus trilinei vnitate auctus ad numerum trilinei vnitate minutum, ex schol. 1. proposit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. nempe vt potestas AB, vno gradu superior potestate trilinei ad tales sui partes, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo ex æquali, erit triangulum CBD, ad spatium contentum à recta, & curua CB, vt factum sub excessu potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei supra similem potestatem BF, in quadratum BA, ad tales partes potestatis AB, vno gradu superioris potestate trilinei, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minu-

tus,

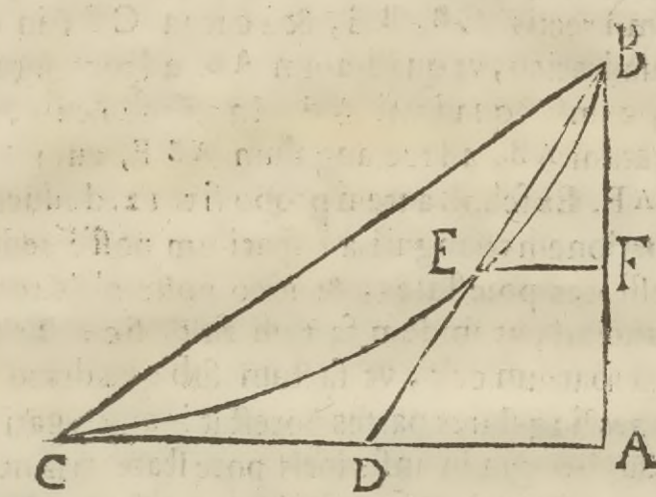


tus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Rursum, spatium comprehensum à recta, & curua CB, est ad spatium comprehensum à recta, & curua BE, vt potestas AB, vno gradu superior potestate trilinei, ad similem potestatem BF, ex schol. 1. proposit. 3. lib. 1. nempe vt tales partes prædictæ potestatis AB, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum, ad similes partes potestatis BF. Ergo per conuersionem rationis, erit spatium comprehensum à recta, & curua CB, ad excessum ipsius supra spatium comprehensum à recta, & curua BE, vt tales partes potestatis AB, vno gradu altioris potestate trilinei, quæ se habeant ad ipsam potestatem AB, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum tri-

lin ei vnitate auctum, ad excessum ipsarum supra similes partes similis potestatis BF. Ergo rursum ex æquali, erit triangulum CBD, ad spatium comprehensum à rectis CB, BE, & à curua CE, vt factum sub excessu potestatis AB, vno gradu depressioris potestate trilinei supra similem potestatem BF, in quadratum BA, ad excessum talium partium potestatis AB, vno gradu altioris potestate trilinei, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum, supra similes partes potestatis similis BF; nempe ad tale partem excessus potestatis prædictæ AB, supra similem potestatem BF, quæ se habeant ad ipsum excessum, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Quod ostendere oportebat.

SCHOLIVM.

Recolenti autem superius ostensa in proposit. 11. & 12. & in scholijs earundem, fiet manifestum, quod si AB, in hac proposit. æquetur DA, in schemat. illarum proposit. & BF, in hac ipsi CA, in illis, fiet inquam manifestum, triangulum CBD, in hac, ad spatium comprehensum à rectis CB, BE, & à curua EC, esse vt sector OAD, in illis, ad spatium helicum CAD: & per conuersionem rationis. Nam, in hac ostenditur esse triangulum, ad spatium, vt factum sub quadrato AB, in differentiam



tiam potestatum AB, BF, vno gradu depressiarum potestate trilinei (nempe eiusdem gradus cum spirali, quia semper potestas trilinei supponitur vno gradu altior potestate spiralis) ad tales partes differentiæ potestatum AB, BF, vno gradu altiorum potestate trilinei (nempe duplici gradu altiorum potestate spiralis) quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minutus (nempe vt numerus spiralis) ad numerum trilinei vnitate auctum (nempe ad numerum spiralis binario auctum.) Quæ ratio est eadem, quæ assignatur in proposit. 12. vt consideranti fiet manifestum.

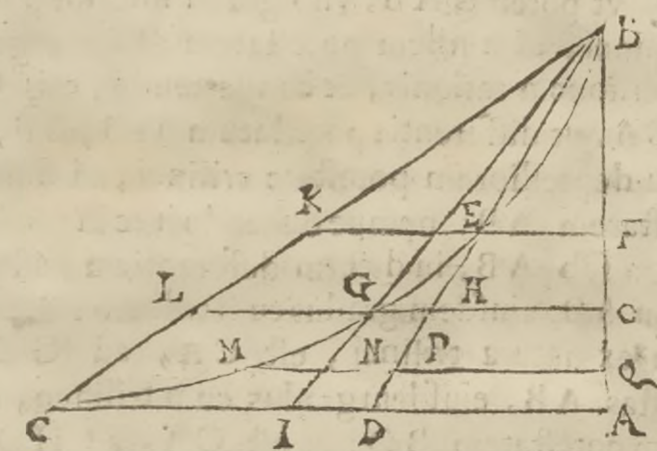
Ex his ergo habemus, quod nunc omnia verificabuntur, quæ vera erant in illis proposit. & in schol. earundem. Ergo ex schol. proposit. 11. deduce-

mus, eſſe triangulum CBD, ad ſpatium comprehenſum à rectis CB, BE, & à curua CE, in trilineo quadratico, vt quadratum AB, ad rectangulum ABF, cum $\frac{1}{3}$ quadrati AF. In trilineo cubico, vt quadratum AB, ad rectangulum ABF, cum $\frac{2}{4}$ quadrati AF. Ex ſchol. autem propoſit. 12. deducemus, proportionem trianguli ad ſpatium poſſe reduci ad depreſſiores poteſtates, & ideo poſſe alijs terminis pronunciari, vt ibidem factum fuit, ſic. Triangulum ad ſpatium erit, vt factum ſub quadrato AB, in omnes ſingulares partes poteſtatis adgregati AB, BF, duplici gradu inferioris poteſtate trilinei, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati AB, BF, eiuſdem gradus cum trilineo, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum vnitate auctum.

PROPOSITIO XV.

In ſchem. propoſit. anteced. ducta HO, parallela DA. Erit CA, ad HO, vt poteſtas AB, eiuſdem gradus cum trilineo, ad factum ſub OB, in poteſtatem BF, vno gradu inferiorem poteſtate trilinei.

Patet, quia ratio CA, ad HO, componitur ex rationibus CA, ad AD, & AD, ad HO. Sed vt CA, ad AD, ſic ex propoſit. 5. poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. Et vt DA, ad HO, ſic AB,



AB, ad BO. Ergo ratio CA, ad HO, erit compoſita ex prædictis rationibus. Aſt ex illis componitur etiam ratio poteſtatis AB, eiuſdem cum trilineo gradus, ad factum ſub OB, in poteſtatem BF, vno gradu inferiorem poteſtate trilinei. Quare patet propoſitum.

PROPOSITIO XVI.

In ſchem. propoſit. anteced. ſi OH, parallela CA, occurrat curuæ in G. Erit CD, ad GH, vt factum ſub AB, & ſub differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei, ad factum ſub OB, & ſub differentia poteſtatum OB, BF, itidem vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei.

PRO-

QVoniam enim ex proposit. 5. est CA, ad AD, vt potestas AB, vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem BF; ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit CD, ad CA, vt differentia potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, ad similem potestatem AB; nempe ducendo hæc in AB, vt factum sub AB, in dictam differentiam, ad potestatem AB, eiusdem gradus cum trilineo. Sed quoniam ex natura trilinei, est CA, ad GO, vt potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad similem potestatem BO: & est CA, ad HO, ex proposit. anteced. vt potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad factum sub AB, in potestatem BF, vno gradu inferiorem potestate trilinei. Ergo erit CA, ad GH, vt potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad factum sub OB, & sub differentia potestatum OB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei. Sed supra probata fuit CD, ad CA, vt factum sub AB, & sub differentia potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, ad potestatem AB, eiusdem gradus cum trilineo. Quare ex æquali, erit CD, ad GH, vt factum sub BA, in differentiam potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, ad factum sub OB, in differentiam similium potestatum OB, BF. Quod erat ostendendum.

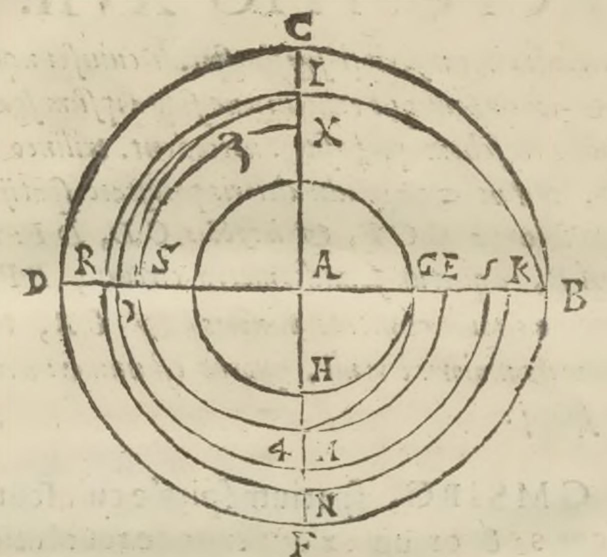
PRO-

PROPOSITIO XVII.

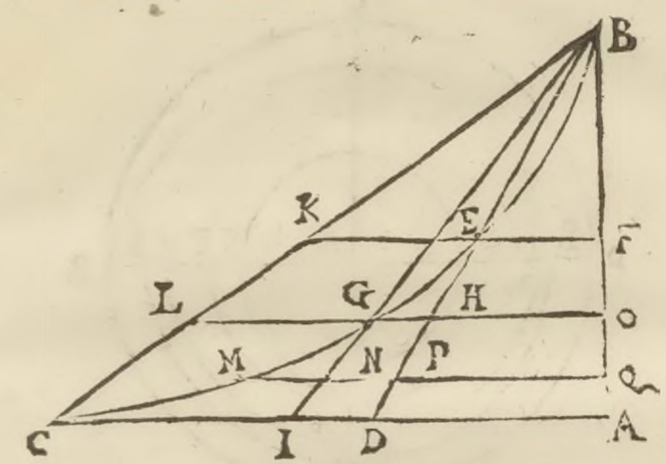
Excessus circuli circumscripti spatio spirali cuiuscunque generis, & ex quacunque reuolutione supra ipsum spatium, est æqualis in schem. proposit. antecedent. trilineo mixto CED, trilinei vno gradu altioris potestate spatij, comprehenso à curua CGE, & à rectis CD, DE: dummodo AB, æquetur semidiametro circuli; BF, semidiametro circuli vnitate minoris, & CA, tot circumferentijs maioris circuli, quotus est numerus reuolutionum spatij.

ESto GMSIBG, spatium spirale cuiuscunque generis, & ortum ex quacunque reuolutione, & FDCB, sit circulus ipsi circumscriptus; sit etiam circulus radij AG, ipso vnitate minor: v. g. si circulus radij AB, sit circumscriptus secundo spatio, sit circulus radij AG, primi spatij: si ille sit circulus tertij spatij, sit hic secundi: &c. item sit trilineum proposit. anteced. CEBA, vno gradu altius gradu spatij spiralis; sitque AB, in trilineo æqualis AB, semidiametro circuli maioris, & BF, in trilineo æqualis semidiametro AG, circuli minoris: pariter sit CA, in trilineo æqualis tot peripherijs FDCB, quotus est numerus spatij GMSIBG: v. g. si spatium sit ex secunda reuolutione, duabus: si tertiæ, tribus: & sic semper. Dico, excessum circuli radij AB, supra dictum spatium, æqualem fore trilineo CGED.

Quo-

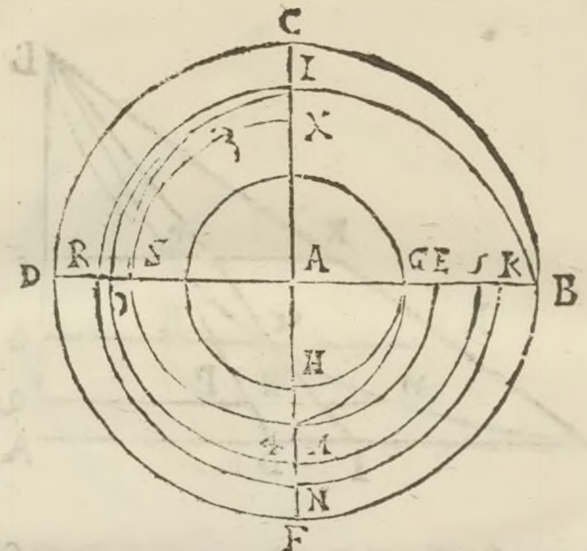


Quoniam enim in ſpirali circulus radij A G, eſt vnitate minor circulo radij A B. Ergo ex natura infinitarum ſpiralium initio explicata, diuiſa poteſtate A B, eiuſdem gradus cum ſpirali in tot partes quotus eſt numerus reuolutionum, poteſtas A G, eiuſdem gradus cum ſpirali continebit ipſas, vna excepta, adeo vt differentia poteſtatum B A, A G, ſit vnica talium partium. Cum verò etiam in trilineo, A B, ſit æqualiter ſecta in F, ſicuti illa in G: etiam differentia poteſtatum A B, B F, eiuſdem gradus cum ſpirali, & gradus vnitate minoris poteſtate trilinei, continebit talium partium vnicam partem. Sed quoniam ex propoſit. 5. eſt C A, ad A D, vt poteſtas A B, vno gradu inferiori poteſtate trilinei, ad ſimi-

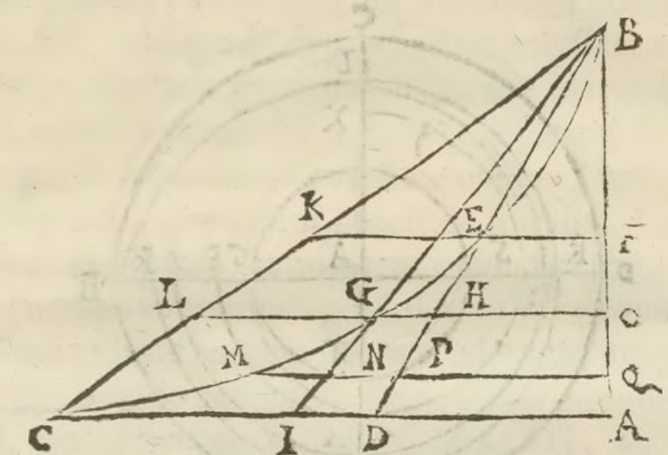


ſimilem poteſtatem B F. Ergo per conuerſionem rationis, erit C A, ad C D, vt poteſtas dicta A B, ad differentiam poteſtatum A B, B F. Sed C A, æquatur tot circumferentijs F D C B, quotus eſt numerus reuolutionum: & differentia poteſtatum A B, B F, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei continet vnicam partem poteſtatis ſimilis A B, diuiſæ in tot partes quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo C D, erit æqualis vni circumferentiæ F D C B. Sed etiam B A, diameter trilinei æquatur radio A B, circuli. Ergo triangulum C B D, in trilineo, erit æquale circulo radij A B. Quæ ſeruentur.

Tunc, in G B, in ſpirali accipiatur quodlibet punctum E, & centro A, interuallo A E, deſcribatur circuli peripheria E M, occurrens ſpirali in M; & facta in trilineo F O, æquali G E, ducatur OHG, paral-



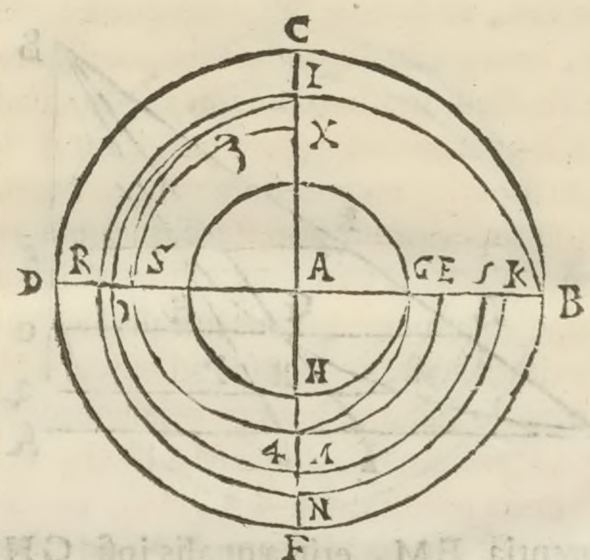
parallela CA. Quoniam in ſpirali, ex propoſit. 4. eſt peripheria FDCB, ad peripheriam EM, vt factum ſub AB, in differentiam poteſtatum BA, AG, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub EA, in differentiam ſimilium poteſtatum EA, AG: & pariter in trilineo, ex propoſit. anteced. eſt CD, ad GH, vt factum ſub AB, in differentiam poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei, (nempe eiuſdem gradus cum ſpirali) ad factum ſub OB, in differentiam ſimilium poteſtatum OB, BF. Ergo, vt in ſpirali circumferentia FDCB, ad circumferentiam EM, ſic in trilineo, CD, ad GH. Et permutando, vt FDCB, ad CD, ſic EM, ad GH. Sed circumferentia FDCB, probata fuit æqualis rectæ CD. Ergo & cir-



circumferentia EM, erit æqualis ipſi GH. Sed FA, in trilineo eſt æqualis GB, in ſpirali, & puncta E, O, accepta fuerunt arbitrariè, & inuenta fuit æqualitas. Ergo omnes circumferentiæ exceſſus circuli radij AB, ſupra ſpatium ſpirale concentricæ ipſi FDCB, æquales erunt omnibus lineis trilinei CGED, parallelis ipſi CD. Ergo exceſſus prædictus erit æqualis trilineo mixto CGED. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM I.

Qui parui pendet indiuiſibilia, & gratulatur excruciari in methodo archimedea, ipſam experiatur, nam eandem veritatem deducet. Attentè etiam conſideret, quod probatum fuit de totis, probari



quoque poſſe de partibus proportionalibus. Non enim tantum totus exceſſus æquabitur toto trilineo CGED. Sed etiam pars clauſa peripheria BCDFB, ſpirali BISM, peripheria ME, & recta EB, erit æqualis quadrilatero CGHD. Item reliqua pars GMEG, æqualis trilineo EGH. Idem dicatur de cæteris partibus proportionalibus.

SCHOLIVM II.

Ergo per conuerſionem rationis, erit circulus ad ipſum ſpirale ſpatium, vt triangulum CBD, ad ſpatium comprehenſum rectis CB, BE, & curua CGE.

Cum

Cum verò ex propoſit. 14. ſit triangulum CBD, ad illud ſpatium, vt factum ſub differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei (nempe eiuſdem gradus cum ſpirali) in quadratum BA, ad tales partes differentiæ poteſtatum AB, BF, vno gradu ſuperiorum poteſtate trilinei (nempe duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis,) quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus (nempe vt numerus gradus ſpiralis) ad numerum trilinei vnitate auctum (nempe ad numerum gradus ſpiralis binario auctum.) Ergo etiam circulus radij AB, erit ad ſpatium ſpirale GMSIBG, vt factum ſub differentia poteſtatum BA, AG, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum BA, ad tales partes differentiæ poteſtatum BA, AG, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad dictam differentiam, vt numerus gradus ſpiralis ad ipſum binario auctum.

SCHOLIVM III.

Immo ex ſchol. citat. propoſit. 14. poterimus alias compendioſiores rationes aſſignare. Nam in ſpirali lineari deducemus, eſſe circulum ad ſpatium, vt quadratum BA, ad rectangulum BAG, cum $\frac{1}{3}$ quadrati BG. In quadratica, vt idem quadratum BA, ad idem rectangulum BAG, cum $\frac{1}{2}$ quadrati GB. Et vniuerſaliter deducemus, eſſe circulum ad ſpatium, vt factum ſub quadrato AB, in omnes ſingu-

lares

lares partes poteſtatis adgregati AB, AG, vnius gradus inferioris, grad 1 ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati AB, AG, vno gradu altioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

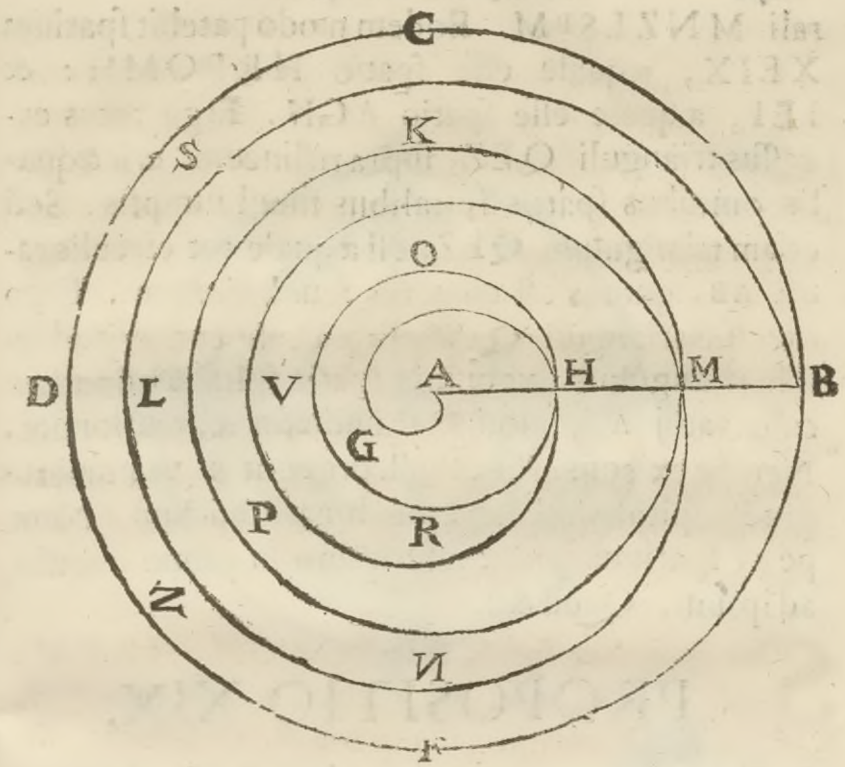
PROPOSITIO XVIII.

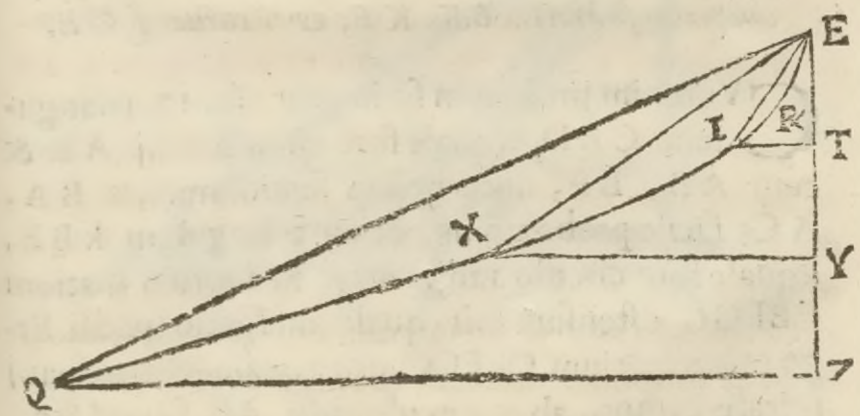
Omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiuè inſcripta in quibuslibet circulis ſimul ſumpta, ſunt ad tot circulos maiores quotus eſt numerus reuolutionum, & vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum.

Sint quælibet ſpatia ſpiralia AGH, HRPM, MNLSB, inſcripta in circulis radiorum AH, AM, AB. Dico omnia illa ſpatia ſimul ſumpta eſſe ad tot circulos radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum (nempe in noſtro caſu ad tres) vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Nempe in prim. vt 1. ad 3. In ſecund. vt 2. ad 4. vt 3. ad 5. &c.

Sit etiam triangulum QEZ, cum ſibi inſcripto trilineo parabolico QEZ, gradus congruentis gradui ſpiralis; ſitque talis indolis, vt ZE, YE, ET, ſint æquales AB, AM, AH; & QZ, ſit æqualis tot peripherijs BFDC, quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo ex propoſit. anteced. ſpatium contentum rectis QE, EX, & curua QX, erit æquale ſpatio ſpi-

rali





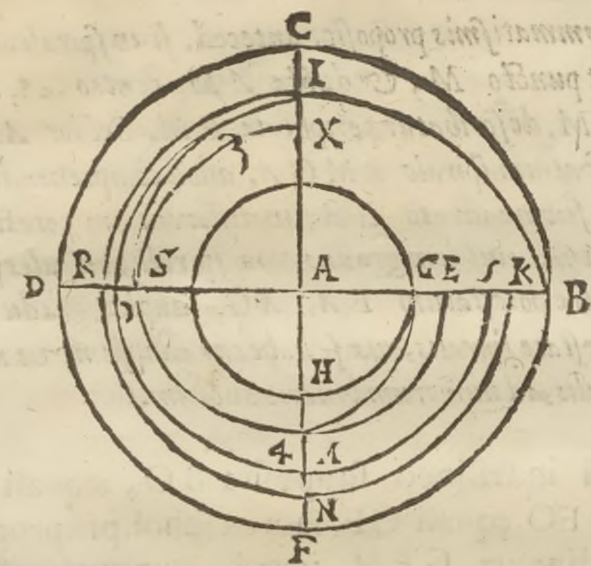
rali MNZLSBM. Eodem modo patebit ſpatium XEIX, æquale eſſe ſpatio HRPOMH: & IEI, æquale eſſe ſpatio AGH. Ergo totus exceſſus trianguli QEZ, ſupra trilineum, erit æqualis omnibus ſpatijs ſpiralibus ſimul ſumptis. Sed etiam triangulum QEZ, eſt æquale tot circulis radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo exceſſus trianguli QEZ, ſupra trilineum erit ad ipſum triangulum, vt omnia ſpatia ſpiralia ad tot circulos radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum. Nempe ex conuerſo coroll. propoſit. 9. vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Nempe vt ſpatium ſpirale inſcriptum in primo circulo, ad ipſum. Quod &c.

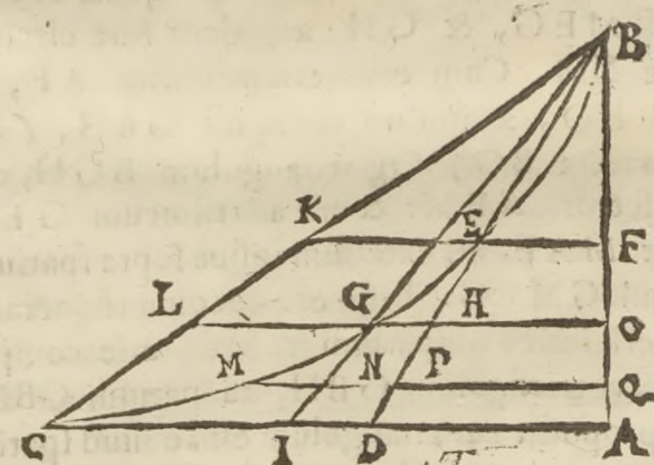
PROPOSITIO XIX.

In ſchematibus prop. 17. exceſſus ſpatij ſpiralis GMSIBG, ſupra circulum radij AG, eſt æqualis in trilineo ſpatio comprehenſo à rectis CK, KE, & à curua CGE.

CVm enim probatum ſit in propoſit. 17. triangulum CBD, æquale fore circulo radij AB: & cum AB, BF, ſint aquales ſemidiametris BA, AG; facile probabimus, etiam triangulum kBE, æquale fore circulo radij AG. Sed totum ſpatium CBEGC, oſtenſum fuit æquale toti ſpatio ſpirali. Ergo etiam ſpatium CkEGC, erit æquale reliquo ſpatij ſpiralis dempto ab eo circulo radij AG. Quod &c.

PRO-



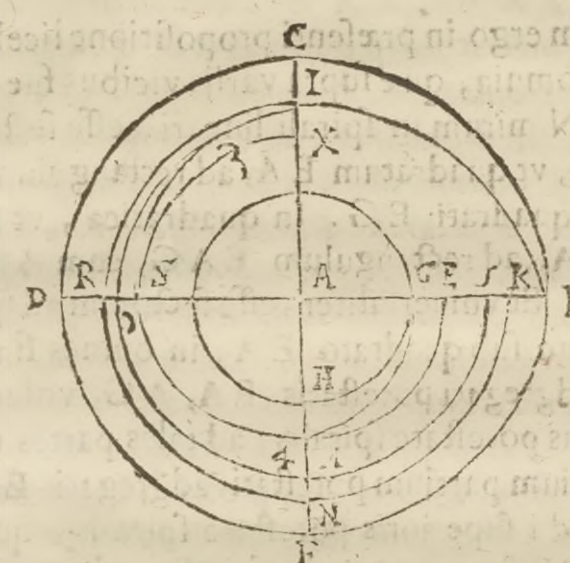


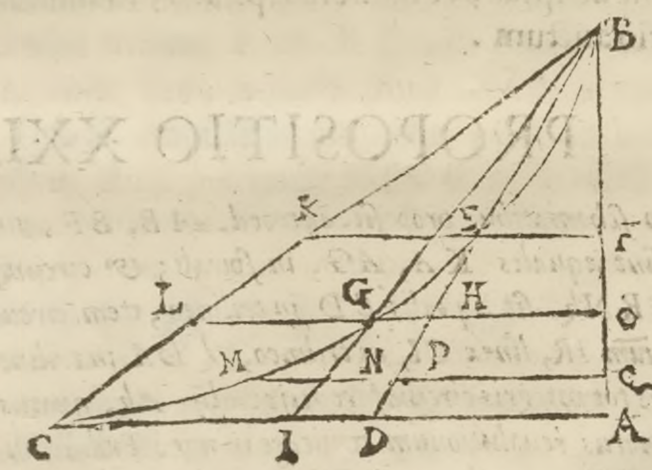
K PRO-

PROPOSITIO XX.

In Diagrammatismis proposit. anteced. si in spirali accepto vbilibet puncto M, & ducta A M, centro A, interuallo A M, describatur peripheria E M. Sector A M E, erit ad spatium spirale A M G A, quod comprehendit, vt factum sub quadrato E A, in differentiam potestatum E A, A G, eiusdem gradus cum spirali, ad tales partes differentiæ potestatum E A, A G, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum.

NAM in trilineo, supposita B O, æquali A E, & FO, æquali GE, iam ex schol. pri. prop. 17. patet, trilineum G E H, in trilineo æquale esse excessui G M E G, & G H, æqualem fore circumferentiæ E M. Cum ergo etiam radius A E, sit æqualis B O, altitudini trianguli G B H, (ducta prius recta B G.) Ergo triangulum B G H, erit æquale sectori A E M: & erit ad trilineum G E H, vt sector M A E, ad excessum ipsius supra spatium; nempe ad G M E G. Ergo & per conuersionem rationis, erit sector ad spatium A M G, à se comprehensum, vt triangulum G B H, ad spatium G B E G. Sed ex proposit. 14. triangulum est ad illud spatium in assignata ratione. Quare patet propositum.





SCHOLIVM.

Etiam ergo in præſenti propoſitione licebit colligere ea omnia, quæ ſupra varijs vicibus fuerunt collecta. Nimirum in ſpirali lineari, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt quadratum E A, ad rectangulum EAG, cum ½ quadrati E G. In quadratica, vt quadratum E A, ad rectangulum E A G, cum ⅓ quadrati G E. Et vniuerſaliter, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt factum ſub quadrato E A, in omnes ſingulares partes adgregati poteſtatis E A, A G, vnius gradus inferioris poteſtate ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati E A, A G, vno gradu ſuperioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

PROPOSITIO XXI.

Si in ſchematibus propoſit. anteced. A B, B F, in trilineo ſint æquales K A, A G, in ſpirali; & circumferentia I R N k, ſit æqualis C D, in trilineo, item circumferentiam I R, lineæ C I, in trilineo, & D A, in trilineo æqualis tot integris circumferentijs radij A k, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor. Trilineum C G I, in trilineo, erit æquale trilineo R I S, in ſpirali, quod eſt exceſſus ſectoris R A I circumſcripti ſpatio S A I, ſupra ipſum.

Etenim

Etenim, cum C I, linea in trilineo ſit æqualis circumferentiæ I R, in ſpirali, & A B, in trilineo æqualis ſemidiametro K A, ſeù R A, in ſpirali: triangulum C B I, erit æquale ſectori R A I. Tunc in R S, accipiatur quodlibet punctum 2, & deſcribatur circumferentia 2 3, ſemidiametro A 2, occurrens ſpirali in 3; & facta in trilineo B Q, æquali A 2, ſit M N P Q, parallela C A. Ad modum dictorum in propoſit. 17. deducemus, M N P, in trilineo æqualem fore circumferentiæ 3 2 4 5, in ſpirali. Cum verò etiam N P, in trilineo ſit æqualis circumferentiæ 2 4 5, in ſpirali (quia ex hypotheſi, I D, eſt æqualis circumferentiæ R N k.) Ergo M N, in trilineo, erit æqualis circumferentiæ 2 3, in ſpirali. Quia verò R S, eſt æqualis O A; expertis in methodo indiuiſibilium patebit, omnes circumferentias trilinei R I S, in ſpirali concentricas circumferentiæ R I, æquales fore omnibus lineis trilinei C G I, parallelis C I. Ac proinde trilineum ipſum R I S, æquale fore trilineo C G I. Quod &c.

SCHOLIVM.

Cum verò ſupra probatum ſit, triangulum C B I, æquale eſſe ſectori R A I; ergo triangulum B C I, erit ad trilineum C G I, vt ſector R A I, ad trilineum R I S. Quare per conuerſionem rationis, erit ſector ad ſpatium S A I, quod includit, vt triangulum

lum CBI, ad spatium CBGC. Cum ergo ex proposit. 14. sit triangulum CBI, ad spatium, vt factum sub quadrato AB, in differentiam potestatum AB, BO, vnius gradus inferioris potestate trilinei (nempe eiusdem gradus cum spirali) ad differentiam potestatum AB, BO, vnius gradus superioris potestate trilinei (nempe duplici gradu altiorum potestate spiralis;) sic etiam erit sector RAI, ad spatium spirale. Nempe erit ad ipsum, vt factum sub quadrato RA, in differentiam potestatum RA, AS, eiusdem gradus cum spirali, ad differentiam potestatum RA, AS, duplici gradu altiorum potestate spiralis.

Cum ergo proportio reperta inter sectorem, & spatium, sit similis aliqualiter supra repertis, patebit omnia compendia varijs vicibus supra explicata, posse etiam assignari in præsenti. Verum ergo erit etiam in presenti, quod in spirali lineari, erit sector ad spatium, vt quadratum RA, ad rectangulum RAS, cum $\frac{1}{3}$ quadrati RS. Item in spirali quadratica, erit sector ad spatium, vt quadratum RA, ad rectangulum RAS, cum $\frac{1}{5}$ quadrati RS. Pariter vniuersaliter poterimus pronunciare. Esse sectorem ad spatium, vt factum sub quadrato RA, in omnes singulares partes adgregati potestatis RA, AS, vnius gradus inferioris potestate spiralis, ad tales partes omnium singularium partium potestatis adgregati RA, AS, vno gradu superioris potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsas, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Omnia spatia spiralia successiue inscripta in quibuslibet circulis simul sumpta, vna cum quolibet segmento spatij reuolutionis vnitate maioris inscripto in insectore, sunt ad tot integros circulos sectoris quotus est numerus spatiorum integrorum, vna cum ipso sectore, vt numerus gradus spiralis ad numerum binario auctum.

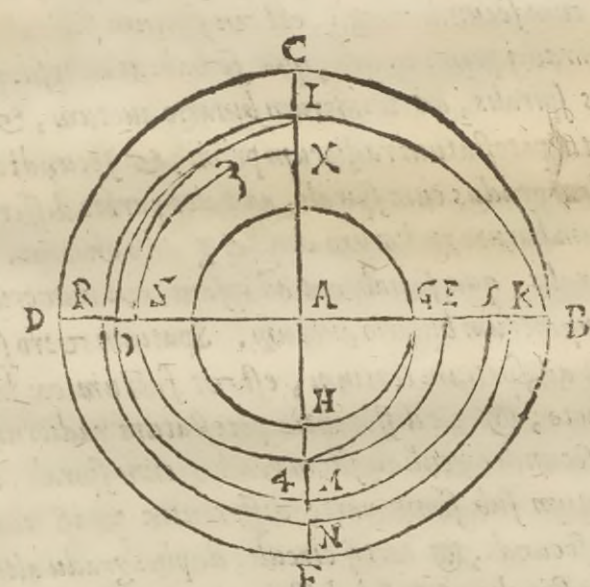
IN schematibus proposit. anteced. supponamus circulum radij AG, esse circulum circumscriptum spatio spirali cuiuscumque reuolutionis, v.g. secundæ, ita vt intra ipsum intelligendus sit circulus primus circumscriptus spatio primæ reuolutionis: sit etiam circulus radij AB, circumscriptus spatio tertiæ reuolutionis: & centro A, interuallo quolibet AE, intelligatur sector MAE, circumscriptus MAG, segmento spatij tertiæ reuolutionis. Dico omnia spatia spiralia successiue (nempe in casu nostro primæ, & secundæ reuolutionis) vna cum segmento MAG, esse ad tot integros circulos radij AE, quotus est numerus spatiorum integrorum (nempe in casu nostro ad duos) vna cum sectore MAE, vt numerus gradus spiralis, ad numerum binario auctum.

Supponamus enim trilineum sæpe dictum CBA, & C. esse talis indolis, vt AB, sit æqualis AE, in spirali, & BF, sit æqualis AG: item AD, sit æqualis

lis duabus circumferentijs radij AE, & CD, sit æqualis circumferentiæ EM. Facile patebit, triangulum CBD, æquale esse sectori MAE; & totum triangulum CBA, æquale esse duobus circulis radij AE, & sectori MAE: item ex proposit. anteced. facile patebit, in trilineo trilineum mixtum CGED, æquale esse in spirali trilineo GME: & CBEC, in trilineo, æquale esse MAG, in sectori. Pariter ad modum proposit. 18. patebit, spatium EB, in trilineo æquale esse alijs duobus spatijs spiralibus inclusis intra circulum radij AG, & alium ipsi inclusum (licet enim schema non exprimet, facile hoc percipietur si consideremus circulum radij AG, in præsenti gerere vicem circuli radij AM, in dicta proposit. 18.) Quare manifeste patebit, duos circulos radij AE, vna cum sectore AME, esse ad primum, & secundum spatium spirale, vna cum segmento MAG, vt triangulum CBA, ad excessum ipsius supra trilineum. Nempe ex sæpe dictis, vt numerus gradus spiralis binario auctus, ad numerum. Nempe vt circulus circumscriptus primo spatio ad ipsum. Quare conuertendo, patet propositum. Quod &c.

PROPOSITIO XXIII.

Si in spatio anteced. proposit. semidiametro minori linea inscribatur sector SAX. Erit RIS, trilineum, excessus sectoris maioris supra spatium, ad SIX, trilineum, excessum spatij supra minorem sectorem, vt excessus facti sub differentia potestatum RA, AS, eiusdem gradus cum spirali, in quadratum RA, supra tales partes differentiæ potestatum RA, SA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad dictam differentiam, vt numerus spiralis ad eundem numerum binario auctum, ad excessum prædictarum partium differentiæ potestatum RA, SA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, supra factum sub differentia potestatum RA, AS, eiusdem gradus cum spirali, in quadratum SA.



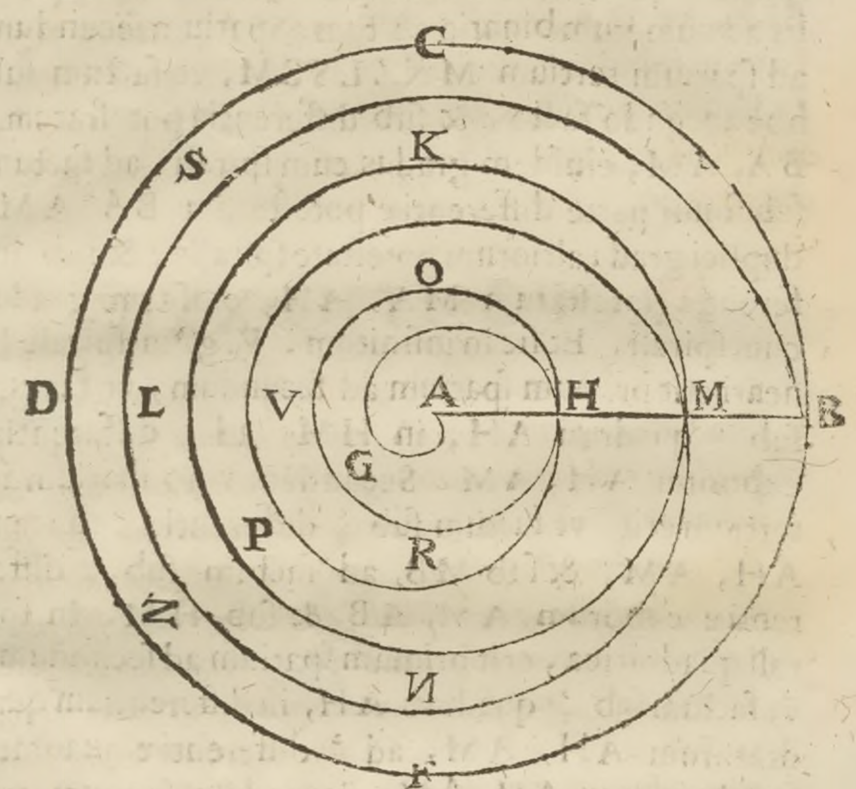
HÆc demonstratio erit similis traditæ in proposit. 13. quæ ideo ex ipsa petenda est. Immo omnia compendia deducta in schol. eiusdem, poterimus deducere etiam in præsenti. Verum ergo

etiam erit nunc, esse in spirali lineari, RIS, ad SIX, vt RA, cum $\frac{2}{3}$ RS, ad SA, cum $\frac{1}{3}$ RS. Item in spirali quadratica, RIS, SIX, ęqualia esse. Et in alijs spiralibus poterimus forsitan reperire alia compendia, quæ lector poterit proprio Marte excogitare.

PROPOSITIO XXIV.

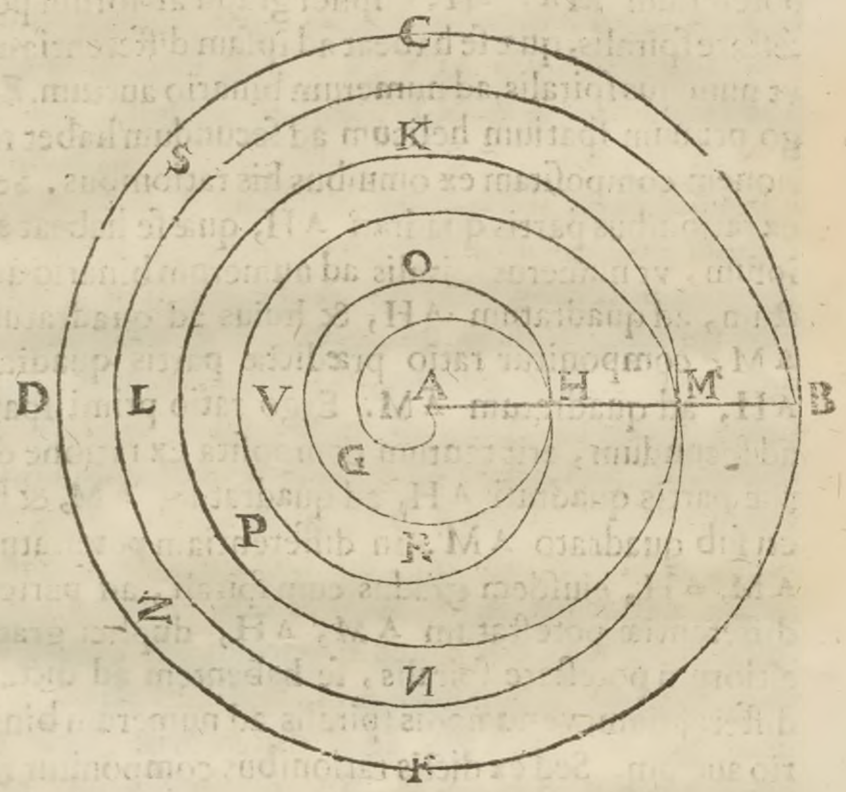
Primi circuli spatium helicum cuiuscunque gradus, ad spatium helicum secundi circuli, est vt factum sub tali parte quadrati radij primi circuli, quæ se habeat ad ipsum, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum, & sub differentia potestatum radiorum primi, & secundi circuli, eiusdem gradus cum spirali, ad tales partes differentiæ potestatum horum radiorum duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Spatium vero secundi circuli ad spatium tertium, est vt factum ex hoc secundo facto, & ex differentia potestatum radiorum tertij, & secundi circuli eiusdem gradus cum spirali, ad simile factum sub simili parte differentiæ potestatum radiorum secundi, & tertij circuli, duplici gradu altiorum potestate spiralis, & sub differentia radiorum primi, & secundi circuli eiusdem gradus cum spirali, & sic deinceps in reliquis.

Sit primum spatium helicum cuiuscunque gradus AGH, cum primo circulo radij AH: item



item secundum spatium HRPMH, cum secundo circulo radij AM: item tertium cum tertio circulo radij AB. Dico primum spatium AGH, esse ad secundum spatium HRPMH, vt factum sub tali parte quadrati AH, quæ se habeat ad ipsum, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum, & sub differentia potestatum MA, AH, eiusdem gradus cum spirali, ad talem partem differentiæ potestatum MA, AH, duplici gradu altiorum potestate

ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Spatium ſecundum ad ſpatium tertium MNZLSBM, vt factum ſub hoc ſecundo facto, & ſub differentia poteſtatum BA, AM, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub ſimili parte differentiæ poteſtatum BA, AM, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, & ſub differentia poteſtatum MA, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali. Et ſic in infinitum. V. g. in ſpirali lineari erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub $\frac{1}{2}$ quadrati AH, in HM, ad $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM. Secundum vero ſpatium ad tertium erit, vt factum ſub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM, & ſub MB, ad factum ſub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AM, AB, & ſub HM. In ſpirali quadratica, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub $\frac{2}{4}$ quadrati AH, in differentiam quadratorum AH, AM, ad $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AH, AM. Secundum ſpatium erit ad tertium, vt factum ſub dicta parte differentiæ, & ſub differentia quadratorum AB, AM, ad factum ſub $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AM, AB; & ſub differentia quadratorum MA, AH; & ſic in alijs. Primum enim ſpatium AGH, ad ſecundum ſpatium HRPMH, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad primum circulum radij AH; huius, ad ſecundum circulum radij AM; & huius, ad ſecundum ſpatium. Primum ſpatium ad primum circulum eſt, vt numerus gradus ſpiralis ad nume-



numerum binario auctum ex coroll. propoſit. 9. nempe vt talis pars quadrati AH, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad ipſum quadratum AH. Circulus radij AH, ad circulum radij AM, eſt vt quadratum AH, ad quadratum radij AM. Circulus radij AM, eſt ad ſpatium ſecundum helicum, quod comprehendit, ex ſchol. 2. propoſit. 17. vt factum ſub quadrato AM, in differentiam poteſtatum MA, AH, eiuſ-

dem

dem gradus cum ſpirali, ad talem partem differentiæ poteſtatum MA, AH, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeat ad ipſam differentiam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Ergo primum ſpatium helicum ad ſecundum habet rationem compoſitam ex omnibus his rationibus. Sed ex rationibus partis quadrati AH, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad quadratum AH, & huius ad quadratum AM, componitur ratio prædictæ partis quadrati AH, ad quadratum AM. Ergo ratio primi ſpatij ad ſecundum, erit tantum compoſita ex ratione dictæ partis quadrati AH, ad quadratum AM, & facti ſub quadrato AM, in differentiam poteſtatum AM, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad partem differentiæ poteſtatum AM, AH, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſe habentem ad dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Sed ex dictis rationibus componitur ratio facti ſub dicta parte quadrati AH, in factum ſub quadrato AM, in differentiam poteſtatum AM, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub quadrato AM, in dictam partem differentiæ poteſtatum AM, AH, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis. Ergo primum ſpatium erit ad ſecundum in præfata ratione. Sed cum in ambobus terminis proportionis reperiatur quadratum AM, ſi poteſtates terminorum deprimantur, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub dicta parte quadrati

drati AH, in differentiam poteſtatum MA, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem partem differentiæ poteſtatum AH, AM, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis. Quod primo erat oſtendendum.

Quod verò ratio ſecundi ſpatij ad tertium ſit ea, quæ ſupra dicta fuit, probabitur ferè eodem modo. Nam ratio ſecundi ſpatij ad tertium componitur ex ratione ipſius ad ſecundum circulum; huius ad tertium; & tertij circuli ad tertium ſpatium. Ratio ſecundi ſpatij ad ſecundum circulum eſt, vt pars differentiæ poteſtatum AH, AM, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis, ſe habens ad ipſam differentiam, vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad factum ſub quadrato AM, in differentiam poteſtatum AM, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ex ſchol. 2. propoſit. 15. Ratio circuli radij AM, ad circulum radij AB, eſt vt quadratum AM, ad quadratum AB. Ratio circuli radij AB, ad tertium ſpatium eſt, vt factum ſub quadrato AB, in differentiam poteſtatum AB, AM, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad partem differentiæ poteſtatum AB, AM, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis, ſe habentem ad dictam differentiam, vt numerus ad numerum binario auctum ex ſchol. citat. Ergo ratio ſecundi ſpatij ad tertium componetur ex omnibus antecedentibus ad omnia conſequentia: nempe erit, vt factum ſub omnibus antecedentibus ad factum ſub omnibus conſequentibus. Sed tam in facto ex omni-

omnibus antecedentibus, quam in facto ex omnibus consequentibus reperitur factum sub quadratis AM, AB. Si ergo tam factum sub omnibus antecedentibus, quam factum sub omnibus consequentibus deprimatur, nempe auferatur ab ipsis facta sub quadratis AM, AB, nihilominus seruabitur eadem proportio. Erit ergo à primo ad vltimum, secundum spatium ad tertium spatium, vt factum sub parte differentiæ potestatum AH, AM, duplici gradu superiorum potestate spiralis, se habente ad ipsam differentiam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum, & sub differentia potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub parte simili priori differentiæ potestatum duplici gradu altiorum spirali, ipsarum BA, AM, & sub differentia testatum MA, AH, eiusdem gradus cum spirali. uod secundo erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Etiam in præsenti harum proportionum sunt reperibilia compendia. Sed quia proportio spatiorum spiralium inter se potest expiscari iucundius ex analogia reperta inter dicta spatia, & trilinea parabolica, ideo hæc explicanda prius sunt, postea ipsa compendia assignabimus.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Si quodlibet ex infinitis trilineis parabolicis secetur linea basi parallela, & tam toto trilineo, quam trilineo ad verticem circumscribantur triangula. Erit excessus trianguli circumscripti toto trilineo supra ipsum, ad excessum trianguli circumscripti trilineo ad verticem supra ipsum, vt potestas diametri trilinei vno gradu altior potestate trilinei, ad similem potestatem diametri trilinei ad verticem.

ESto quodlibet trilineum parabolicum QXEZ, cum sibi circumscripto triangulo QEZ, & sit ducta XY, parallela basi QX, & trilineo ad verticem XEY, sit circumscriptum triangulum XEY. Dico spatium comprehensum à recta, & curua QE, esse ad spatium comprehensum à recta, & curua XE, vt potestas ZE, vno gradu altior potestate trilinei ad similem potestatem YE. V.g. in quadratico, vt cubus, ad cubum. In cubico, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum, & sic in infinitum. Hæc propositio ostensa fuit in schol. pri. proposit. 3. lib. pri. de Infinit. Parab. ex eo quod trilinea sint eiusdem rationis. Cum ergo eandem habeat rationem tam triangulum ad triangulum, quam trilineum ad trilineum, quam excessus trianguli supra trilineum, ad excessum trianguli supra trilineum; & triangulum QEZ, sit ad triangulum XEY, vt potestas ZE, vno gradu altior potestate

M trili-

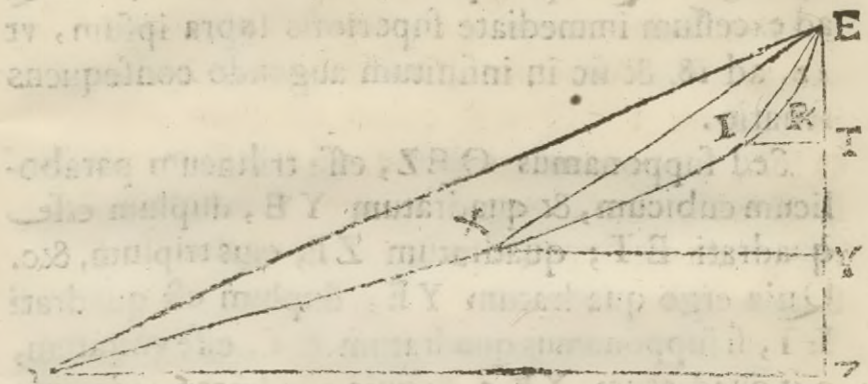
trilinei ad ſimilem poteſtatem EY (quia hæc ratio componitur ex ratione QZ, ad XY; nempe ex ratione poteſtatis ZE, eiuſdem gradus cum trilineo, ad ſimilem poteſtatem EY, & ex ratione ZE, ad EY: quæ duæ componunt rationem poteſtatis EZ, vno gradu altioris poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY;) erit etiam exceſſus trianguli QEZ, ſupra ſuum trilineum, ad exceſſum trianguli XEY, ſupra ſuum trilineum, vt poteſtas ZE, vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY. Quod &c.

SCHOLIVM.

Deducemus ergo diuidendo, eſſe ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEX, vt differentia poteſtatum ZE, EY, vno gradu ſuperiorum poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY. Quod ſi iterum ducta IT, parallela XY, fiat triangulum IET; erit exceſſus XEI, ad exceſſum IEI, vt poteſtas YE, vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem ET. Et diuidendo, erit exceſſus XEIX, ad IEI, vt differentia poteſtatum dictarum YE, ET, ad ſimilem poteſtatem ET. Erit ergo etiam ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEIX, vt differentia poteſtatum ZE, EY, vno gradu altiorum poteſtate trilinei, ad differentiam ſimilium poteſtatum YE, ET.

Si ergo ſupponamus QEZ, eſſe trilineum parabo-

rabo-



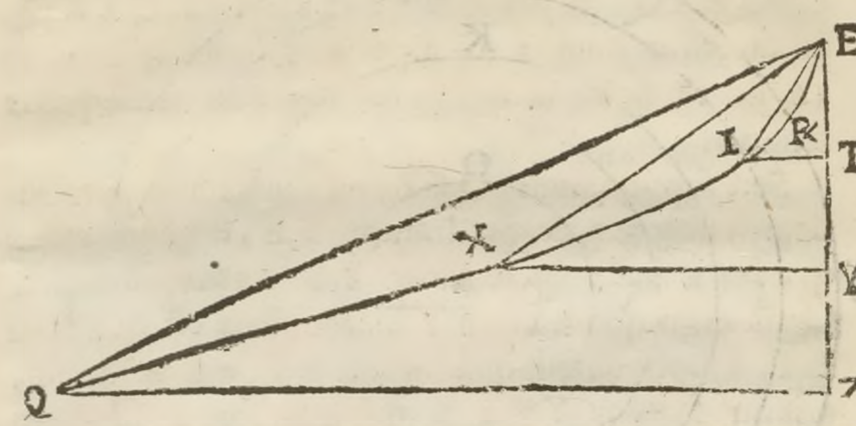
rabolicum quadraticum, & ET, TY, YZ, eſſe æquales; quia EY, eſt dupla ET, ergo cubus ET, erit ad cubum EY, vt 1. ad 8. & ad differentiam cuborum, vt 1. ad 7. Ergo etiam ſpatium IEI, erit ad ſpatium XEIX, vt 1. ad 7. Pariter, quia ZE, eſt ſeſquialtera EY, erit eius cubus 27; & differentia cuborum EY, EZ, 19. Ergo differentia cuborum EY, ET, erit ad differentiam cuborum EY, EZ, vt 7. ad 19. & in eadem ratione erit ſpatium XEIX, ad ſpatium QEXQ. Et eodem modo quadruplicata ET, quintuplicata &c. reperiremus ſpatium QEXQ, eſſe ad immediate maius, vt 19. ad 37. Hoc ad im-

 media-

mediate maius vt 37. ad 61. &c. Vnde diuidendo colligeremus esse IEI, ad excessum XEIX, supra ipsum, vt 1. ad 6. spatium XEIX, ad excessum spatij QEXQ, supra ipsum, vt 6. ad 12. QEXQ, ad excessum immediate superioris supra ipsum, vt 12. ad 18. & sic in infinitum augendo consequens senario.

Sed supponamus QEZ, esse trilineum parabolicum cubicum, & quadratum YE, duplum esse quadrati ET; quadratum ZE, eius triplum, &c. Quia ergo quadratum YE, duplum est quadrati ET, si supponamus quadratum ET, esse vnitatem, erit quadratum YE. 2. & quia quadratoquadratum oritur ex multiplicatione quadrati in se ipsum, erit quadratoquadratum EY, 4. Erit ergo quadratoquadratum YE, ad quadratoquadratum ET, vt 4. ad 1. & diuidendo, vt 3. ad 1. Erit ergo spatium XEIX, ad IEI, vt 3. ad 1. Item quoniam quadratum ZE, est 3. & quadratoquadratum ZE, 9. erit differentia quadratoquadratorum ZE, EY, 5. Erit ergo spatium QEXQ, ad spatium XEIX, vt 5. ad 3. Quod si quadratum ET, intelligeretur quadruplicatum, adeo vt eius quadratoquadratum esset 16, & intelligerentur aucta omnia; esset spatium immediate maius, ad spatium QEXQ, vt 7. ad 5. & sic in infinitum secundum progressionem numerorum imparium ab vnitate procedentium. Diuidendo ergo, erit spatium IEI, ad excessum spatij XEIX, supra ipsum, vt 1. ad 2. spatium vero

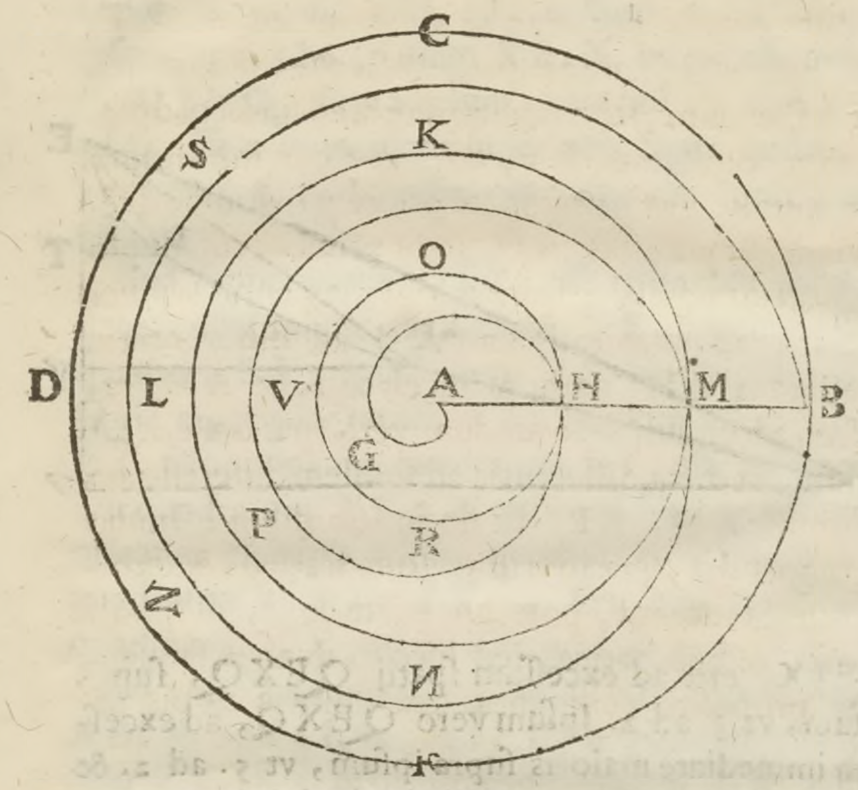
XEIX,



XEIX, erit ad excessum spatij QEXQ, supra ipsum, vt 3. ad 2. Ipsum vero QEXQ, ad excessum immediate maioris supra ipsum, vt 5. ad 2. & sic in infinitum, ita vt omnia antecedentia contineant seriem imparium incipientium ab vnitate, consequens verò sit semper binarium.

His explicatis, supponamus diametrum ZE, trilinei æqualem esse AB, semidiametro circuli diagrammatis proposit. 24. YE, in trilineo ipsi AM, in circulo, & TE, in trilineo æqualem AH, in spirali, & ZQ, basim trilinei æqualem tot circumferentijs FDCB, quotus est numerus reuolutionum, v. g. in casu nostro tribus. Ergo ex proposit.

17.



17. ſpatium in trilineo QEXQ, eſt æquale in ſpirali tertio ſpatio MNLSBM: item ſpatium XEIX, in trilineo æquale ſecundo ſpatio ſpirali HRPMH: item ſpatium in trilineo IEI, erit ex propoſit. 9. æquale primo ſpatio ſpirali AGHA. Ergo eandem proportionem habebunt ſpatia helica ad inuicem, quam habent prædicta ſpatia in trilineo. Cum ergo vniuerſaliter ſint in trilineo ſpatium primum ad ſecundum, vt poteſtas diametri ipſius

ſius ſcilicet ET, vno gradu altior poteſtate trilinei ad differentiam poteſtatum ſimilium ipſius, ET, EY, diametri ſecundi ſpatij; & vt ſecundum ſpatium ad tertium, ſic hæc differentia ad ſimilem differentiam poteſtatum EY, EZ; & ſic in infinitum: ſic in ſpirali, erit generaliter primum ſpatium ad ſecundum, vt poteſtas AH, radij primi circuli duplo gradu altior poteſtate ſpiralis (gradus enim trilinei ſuperat gradum ſpiralis vnitate) ad differentiam poteſtatum AH, radij primi circuli, & AM, radij ſecundi circuli. Secundum verò ſpatium erit ad tertium, vt dicta differentia ad ſimilem differentiam radiorum AM, AB. Et ſic in infinitum. Immo ea compendia, quæ in trilineis quadratico, & cubico collecta fuerunt, poterunt etiam colligi in ſpirali lineari, & quadratica, ſed hæc in duabus ſequentibus propoſit. colligentur ex alibi à nobis dictis.

PROPOSITIO XXVI.

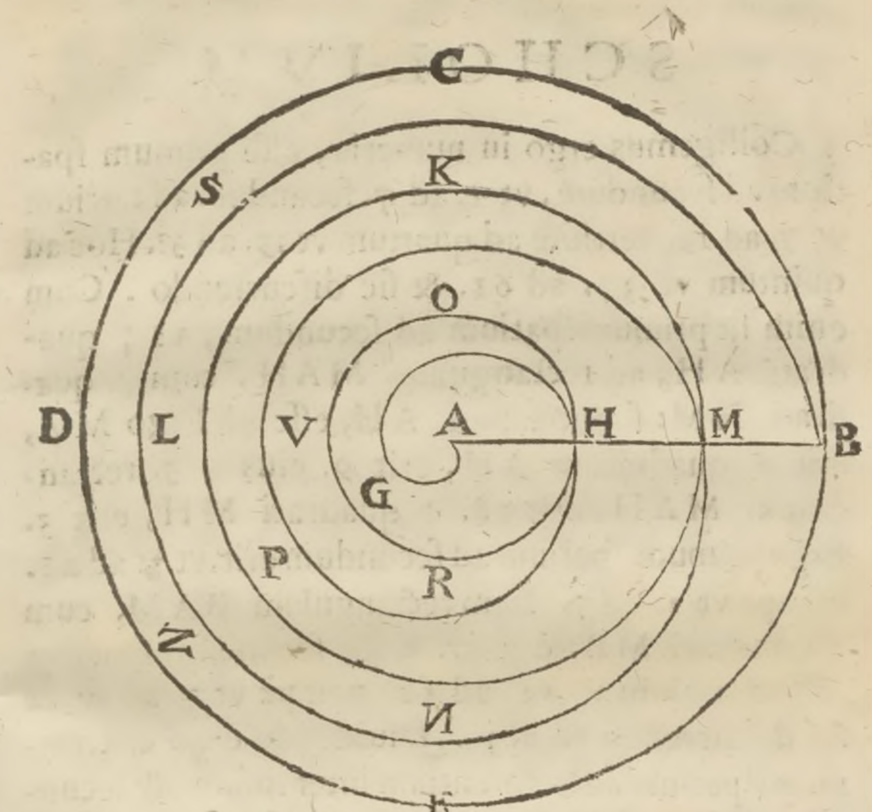
In ſpirali lineari primi circuli ſpatium helicum ad ſpatium helicum ſecundi circuli, erit vt tertia pars quadrati radij primi circuli, ad rectangulum ſub radio primi, & ſecundi circuli, vna cum tertia parte quadrati exceſſus radij ſecundi circuli ſupra radium primi. Spatium vero ſecundi circuli ad ſpatium tertium, erit vt dictum conſequens ad rectangulum ſub radio ſecundi, & tertij,

cum

cum tertia parte quadrati differentiæ horum radiorum, & sic deinceps in reliquis.

HÆc propositio ijsdem terminis, & medijs probatur à Caualerio in lib. 6. Geomet. Ind. proposit. 19. sed nos ipsam ostendemus ex proprijs ostensis. Supponamus ergo vt in proposit. 24. esse spatia, & circulos. Dico primum spatium A G H, esse ad secundum spatium H R P M H, vt tertia pars quadrati A H, ad rectangulum M A H, cum tertia parte quadrati H M. Item secundum spatium dictum ad tertium M N Z S B M, vt rectangulum M A H, cum tertia parte quadrati H M, ad rectangulum B A M, cum tertia parte quadrati M B, & sic in alijs. Etenim spatium A G H, est ex coroll. proposit. 7. $\frac{1}{3}$ circuli radij A H, nempe est ad ipsum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati A H, ad quadratum A H. Circulus radij A H, est ad circulum radij A M, vt quadratum A H, ad quadratum A M. Circulus radij A M, est ad secundum spatium, quod claudit, ex schol. 3. proposit. 17. vt quadratum A M, ad rectangulum M A H, vna cum tertia parte quadrati H M. Ergo ex æquali, erit primum spatium ad secundum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati A H, ad rectangulum M A H, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati H M. Pariter conuertendo, est secundum spatium ad secundum circulum, vt rectangulum M A H, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati H M, ad quadratum A M. Circulus radij A M, est ad circulum radij A B, vt quadratum

A M,



A M, ad quadratum A B. Circulus radij A B, est ex dicto scholio, ad tertium spatium, vt quadratum B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{3}$ quadrati B M. Ergo rursum ex æquali, erit secundum spatium ad tertium, vt rectangulum M A H, cum $\frac{1}{3}$ quadrati M H, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{3}$ quadrati M B. Sic discurreretur in cæteris. Quare patet propositum.

N SCHO-

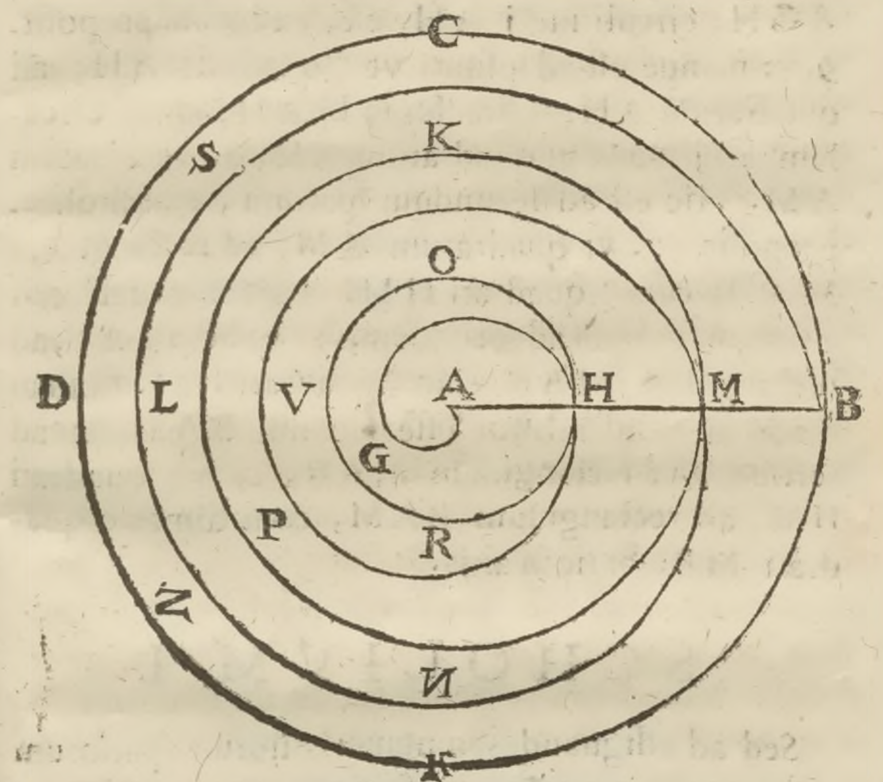
SCHOLIVM.

Colligemus ergo in numeris, eſſe primum ſpatium ad ſecundum, vt 1. ad 7. ſecundum ad tertium vt 7. ad 19. tertium ad quartum vt 19. ad 37. Hoc ad quintum vt 37. ad 61. & ſic diſcurrendo. Cum enim ſit primum ſpatium ad ſecundum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{3}$ quadrati HM: ſupponamus AH, eſſe 3. Ergo MA, erit 6. quadratum AH, erit 9. eius $\frac{1}{3}$ 3. rectangulum MAH, erit 18. $\frac{1}{3}$ quadrati MH, erit 3. Ergo primum ſpatium ad ſecundum erit, vt 3. ad 21. nempe vt 1. ad 7. Item rectangulum BAM, cum ^{1} quadrati MB, erit 57. Ergo ſecundum ſpatium erit ad tertium vt 21. ad 57. nempe vt 7. ad 19. & ſic diſcurrendo in alijs. Diuidendo ergo erit primum ſpatium ad differentiam inter ipſum, & ſecundum, vt 1. ad 6. Secundum ad differentiam inter ipſum, & tertium, vt 6. ad 12. & ſic diſcurrendo augendo ſemper conſequens ſenario.

PROPOSITIO XXVII.

In ſpirali quadratica, primi circuli ſpatium helicum ad ſpatium helicum ſecundi circuli erit, vt $\frac{1}{2}$ quadrati radij primi circuli, ad rectangulum ſub hoc, & ſecundi circuli radio, vna cum $\frac{1}{2}$ quadrati differentiæ horum radiorum. Spatium verò ſecundi ad ſpatium tertij, erit vt

dictum conſequens, ad rectangulum ſub radijs ſecundi, & tertij, vna cum $\frac{1}{2}$ quadrati differentiæ horum, & ſic deinceps in reliquis.



SVpponamus omnia, quæ in ſchemate ſuperiori, ſed ſpatia eſſe ſpiralis quadraticæ. Dico primum ſpatium ad ſecundum eſſe, vt $\frac{1}{2}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM. Secundum ad tertium, vt rectangulum

MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM, ad rectangulum BAM, cum $\frac{1}{2}$ quadrati MB. Et sic in reliquis. Hæc propositio probabitur eodem modo, quo probata fuit superior, & ex ijsdem locis. Spatium enim AGH, circuli radij AH, est, ex coroll. proposit. 9. : nempe est ad ipsum, vt $\frac{1}{2}$ quadrati AH, ad quadratum AH. Circulus radij AH, est ad circulum radij AM, vt quadratum AH, ad quadratum AM. Hic est ad secundum spatium, ex schol. 3. proposit. 17. vt quadratum AM, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM. Ergo ex æquali, erit primum spatium ad secundum, vt $\frac{1}{2}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM. Eodem modo demonstrabitur esse secundum spatium ad tertium, vt rectangulum MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM, ad rectangulum BAM, cum dimidio quadrati MB. Et sic in alijs.

SCHOLIVM I.

Sed ad assignandas in numeris horum spatiorum rationes, magis inseruiet sequens regula. Nempe primum spatium, esse ad secundum, vt quadratum radij primi circuli, ad quadrata ipsius, & radij secundi. Secundum ad tertium, vt hæc quadrata, ad quadrata radiorum secundi, & tertij. Et sic deinceps. Quod vero regula sit vera, patet. Quia, vt dimidium ad dimidium, sic duplum ad duplum. Duplum autem rectanguli MAH, & $\frac{1}{2}$ quadrati MH,

MH,

MH, erunt quadrata MA, AH (Quia duo rectangula MAH, faciunt duo rectangula MHA, & duo quadrata AH; & duo rectangula MHA, cum quadratis AH, HM, faciunt quadratum MA:) & duplum rectanguli BAM, & $\frac{1}{2}$ quadrati MB, faciunt quadrata BA, AM.

In numeris ergo adinueniemus, esse primum spatium ad secundum, vt 1. ad 3. Secundum ad tertium, vt 3. ad 5. & sic in infinitum secundum progressionem numerorum imparium ab vnitate inclusiuè procedentium (quadrata enim AH, AM, AB, sunt ex genesi spiralium initio explicata 1. 2. 3. &c.) Diuidendo ergo erit primum spatium, ad differentiam inter ipsum, & secundum, vt 1. ad 2. Secundum ad differentiam inter ipsum, & tertium, vt 3. ad 2. & sic infinitum.

SCHOLIVM II.

Iis expletis, quæ ad spatiorum helicum mensuram pertinent, in proposit. 21. lib. 6. citat. Geom. Indi. pergit Caualerius considerare proportiones repertas inter cylindros, cylindricos, & conicos super circulis, & spatijs spiralibus existentes. Non ergo rem ingratam lectori fore arbitramur, si & nos in spatijs infinitarum spiralium exequemur illud idem, quod Caualerius in spatijs vnius dumtaxat linearis spiralis adimpleuit. Sed antequam hoc aggrediamur debemus supponere illud idem, quod ipsemet in dicta

pro-

propofit. 21. ex fparfim probatis in fua geometria, deducit. Nimirum. *Quod fi exponatur feries fpiralium, & circulorum deinceps à primis, in fpatijs verò fub fpiralibus, & volutis, cylindrici, & conici in eadem altitudine ftantes intelligantur conftituti tamquam in bafibus, fimiliter & in circulis conftituti effe cylindrici, & coni intelligantur: cylindri inter fe, & cylindrici pariter inter fe, fiue ad cylindros comparati, fiue coni inter fe, & conici inter fe, fiue ad conos comparati eandem rationem, quam bafes habebunt.* Huiufce afferti fubiungit Caualerius probationem inquiens. *Patet hæc propofitio, nam cylindrici, & conici in eadem altitudine conftituti funt inter fe, vt bafes: funt autem prædicta folida per conftructionem in eadem altitudine pofita, ergo erunt inter fe, vt ipfæ bafes; Vocentur autem cylindri, & cylindrici, nec non conici eiufdem numeri cum fpatijs, quibus infiftunt, ideft primus cylindrus, vel conus, qui eft in primo circulo, fecundus cylindrus, vel conus, qui eft in fecundo circulo tamquam in bafi; primus cylindricus, vel conicus, qui eft in fpatio helico primi circuli tamquam in bafi, fecundus cylindricus, vel conicus, qui eft in fpatio fecundi circuli, & fic deinceps.* Hæc Caualerius. Quibus confequenter ad noftram doctrinam addendum videtur, non folum cylindros, conos, cylindricos, conicos, primos, fecundos, tertios, &c. fore nuncupandos fecundum numerum, a quo denominantur circuli, & fpatia fuper quibus infiftunt, fed etiam primi, fecundi, tertij gradus, &c. fecundum quod fpatia ipfamet funt vel linearia, vel quadratica, vel cubica, &c. His explicatis fit.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Primus cylindricus ad primum conicum cuiufcunque gradus eft, vt triplus numerus fpiralis fenario auctus, ad numerum fpiralis.

ESto in fchem. fpiralium, fpatium primum helicum AGH, cum fibi circumfcripto primo circulo radij AH, & fuper circulo intelligamus cylindrum, fuper vero fpatio fpirali conicum eiufdem altitudinis cum cylindro. Dico cylindrum effe ad conicum, vt triplus numerus gradus fpiralis fenario auctus, ad numerum fpiralis. V.g. in lineari, vt 9. ad 1. In quadratica, vt 12. ad 2. In cubica, vt 15. ad 3. & fic in infinitum, augendo femper antecedens ternario, confequens vero vnitate.

Nam, ex coroll. propofit. 9. cylindrus fuper circulo, ad cylindricum fuper fpatio eiufdem altitudinis (quia funt vt bafes) eft, vt numerus gradus fpiralis binario auctus, ad numerum; nempe vt triplus ad triplum; fcilicet vt triplus numerus fenario auctus ad triplum numerum. Ergo erit ad conicum $\frac{1}{3}$ cylindrici, vt triplus numerus fenario auctus, ad numerum. Quod erat oftendendum.

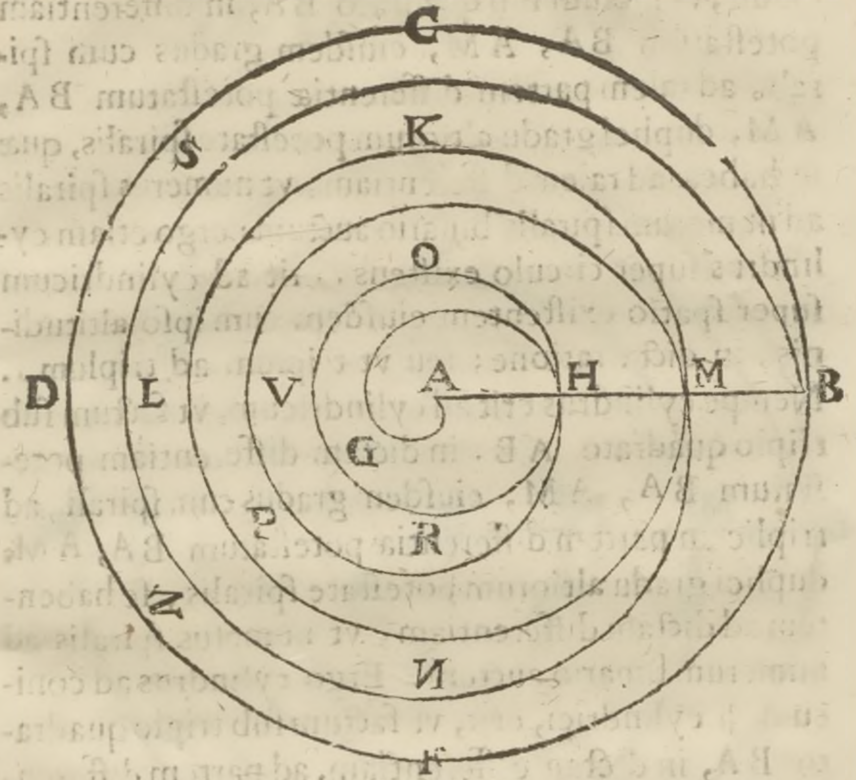
PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Cylindrus super circulo, ad conicum eiusdem altitudinis cum ipso existentem super quolibet aliorum spatiorum à primo cuiuscunque gradus, quod comprehendit. Erit vel vt factum sub triplo quadrato radij ipsius in differentiam potestatum ipsius, & radij circuli vnitate minoris: vel vt factum sub quadrato ipsius, & sub tripla differentia dicta, ad partem differentiæ potestatum radij ipsius, & circuli vnitate minoris duplici gradu altiorum potestate spiralis, se habentem ad ipsam, vt numerus gradus spiralis, ad numerum binario auctum.

ESto in schemat. eodem quilibet circulus radij A B, circumscriptus cuilibet spatio MZ BM, cuiuscunque numeri à primo, & cuiuscunque gradus, & esto A M, radius circuli vnius numeri inferioris. Dico cylindrum super circulo radij A B, esse ad conicum eiusdem altitudinis existentem super spatio MNZSBM, vel vt factum sub triplo quadrato A B, & sub differentia potestatum B A, A M, eiusdem gradus cum spirali: vel vt factum sub quadrato A B, & sub tripla dicta differentia, ad partem differentiæ potestatum B A, A M, duplici gradu altiorum potestate gradus spiralis se habentem ad differentiam, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum. V. g. in spirali lineari, erit cylindrus ad conicum, vel vt factum sub quadrato triplo

A B,



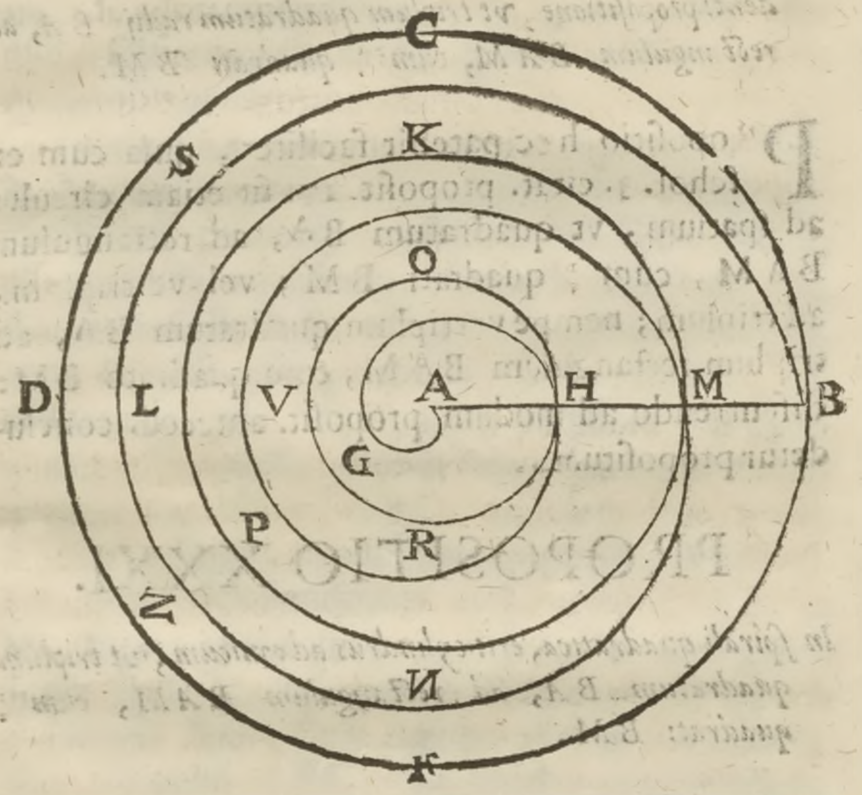
A B, in B M: vel vt factum sub quadrato A B, in triplam B M, ad $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum A B, A M. In quadratica vero erit, vel vt factum sub quadrato triplo A B, in differentiam quadratorum A B, A M: vel vt factum sub quadrato A B, in triplam differentiam quadratorum A B, A M, ad $\frac{2}{4}$ differentiæ quadratoquadratorum A B, A M. Et sic in alijs.

Quoniam enim ex schol. 2. proposit. 17. circulus

O radij

radij AB, est ad spatium MNLSBM, quod includit, vt factum sub quadrato BA, in differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad talem partem differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeat ad talem differentiam, vt numerus spiralis ad numerum spiralis binario auctum; ergo etiam cylindrus super circulo existens, erit ad cylindricum super spatio existentem eiusdem cum ipso altitudinis, in dicta ratione; seu vt triplum ad triplum. Nempe cylindrus erit ad cylindricum, vt factum sub triplo quadrato AB, in dictam differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad triplicem partem differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate spiralis, se habentem ad dictam differentiam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Ergo cylindrus ad conicum $\frac{1}{3}$ cylindrici, erit, vt factum sub triplo quadrato BA, in dictam differentiam, ad partem differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate spiralis se habentem ad ipsam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo patet primum. Cum verò factum sub triplo quadrato AB, in differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, sit æquale facto sub quadrato BA, in triplam dictam differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali; patebit etiam secundum.

SCHOLIVM.



Verum, quoniam in spiralibus lineari, & quadratica assignatæ fuerunt peculiares rationes ad spatia; hinc est quod pro ipsis tradendæ sunt duæ particulares propositiones.

PROPOSITIO XXX.

In spirali lineari, erit cylindrus ad conicum vt in antecedenti propositione, vt triplum quadratum radij B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{3}$ quadrati B M.

PRopositio hæc patebit faciliter, quia cum ex schol. 3. citat. proposit. 17. sit etiam circulus ad spatium, vt quadratum B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{3}$ quadrati B M; vel vt triplum, ad triplum; nempe vt triplum quadratum B A, ad triplum rectangulum B A M, cum quadrato B M: discurrendo ad modum proposit. anteced. concludetur propositum.

PROPOSITIO XXXI.

In spirali quadratica, erit cylindrus ad conicum, vt triplum quadratum B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{2}{3}$ quadrati B M.

PRopositio patebit ex eodem scholio cit. discurrendo superiorum ad instar.

SCHOLIVM.

Posset forsitan lector in operibus eximij Torricellij versatus cogitare, analogiam, quam ipsemet assignauit

gnauit

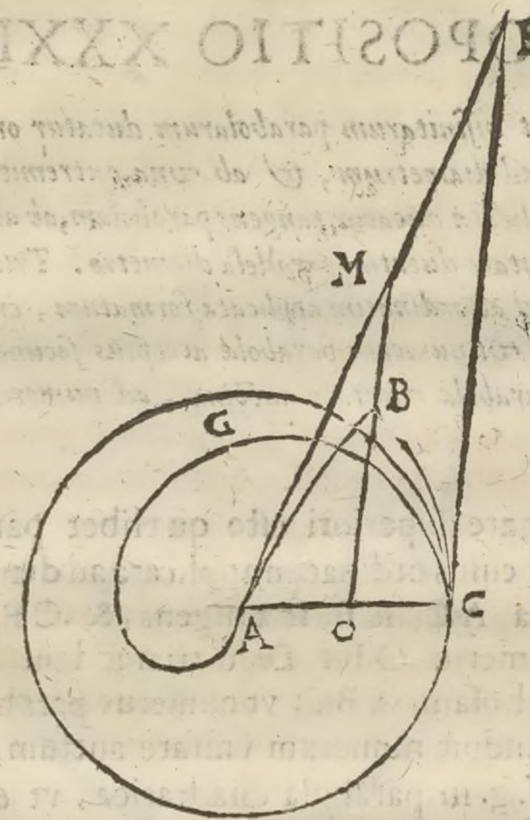
gnauit in propositione 17. de demen. parabolæ, inter parabolam quadraticam, & spiralem linearem, extendi, suo modo, ad infinitas parabolas, & ad infinitas spirales. Quia verò etiam nos hanc rem aliquando contemplati fuimus, & agnouimus huiusce asserti falsitem; ideo determinauimus in hac materia quid nobis occurrerit, manifestare.

Torricellius ergo in loco citato, supponens A C, in diagram. sequent. esse radium primi circuli circumscripti primo spatio spirali A G C A; A B C, esse parabolam quadraticam cuius basis eadem A C, diameter O B; A E, esse ipsam parabolam tangentem; & C E, esse parallelam O B: probauit excessum trianguli A E C, super parabola A B C, æqualem esse excessui circuli super spatio; & consequenter parabolam A B C, æqualem fore spatio A G C A. Quod quomodocunque probet Torricellius, ipsum sic ostendemus. O B, occurrat A E, in M. Ergo ex proposit. 33. prim. conic. M O, erit dupla B O: & consequenter E C, dupla M O, erit quadrupla B O. Cum ergo parallelogrammum duplum trianguli A E C, esset quadruplum parallelogrammi circumscripti parabolæ; erit triangulum A E C, parallelogrammi circumscripti parabolæ duplum; nempe erit ad ipsum, vt 6. ad 3. Sed cum ex quadratura parabolæ quadraticæ ab innumeris propemodum assignata, & etiam à nobis nouiter duobus modis in miscellaneo nostro hyperbolico, & parabolico, in schol. 1. proposit. 26. & in schol. 1

pro-

proposit. 28. sit parallelogrammum parabolæ circumscriptum ad ipsam, vt 3. ad 2. Ergo etiam triangulum A E C, erit ad parabolam A B C, ex æquali, vt 6. ad 2. seù, vt 3. ad 1: & ad excessum ipsius supra parabolam, vt 3. ad 2. Quæ rationes sunt illæ, quas habet circulus ad excessum, & ad spatium spirale, vt apparet ex proposit. 9. & ex eius corollario.

Posset ergo quispiam ex his cogitare, analogiam præsentem perpetuam esse in alijs spiralibus, & in alijs parabolis, ita vt secundum spatium spirale, nempe quadraticum, & excessus quadraticus, sint æquales parabolæ cubicæ, & excessui trianguli A E C, supra ipsam: & sic deinceps. Sed qui hoc arbitraretur ostendere, deciperetur vtique, quia hoc falsum esse in posterum manifestabimus. Sed vt lector percipiat, quæ dicturi sumus, debet quandam doctrinam à proposit. 50. citati miscellanei petere, in qua demonstrauimus. Quod. Si in qualibet infinitorum parabolarum sumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum recta ordinatim applicetur, diameterque ità producatur, vt pars extra parabolam sit ad partem diametri abscissam ab ordinatim applicata versus verticem, vt numerus parabolæ vnitate minutus ad vnitatem. Recta linea, quæ ab extremitate inuentæ lineæ ducitur ad illud punctum, quod sumptum fuerat, parabolam continget. Quæ omnia nil aliud sonant, nisi quod si A E, contingat parabolam quadraticam, M O, erit dupla O B: Si cubicam,



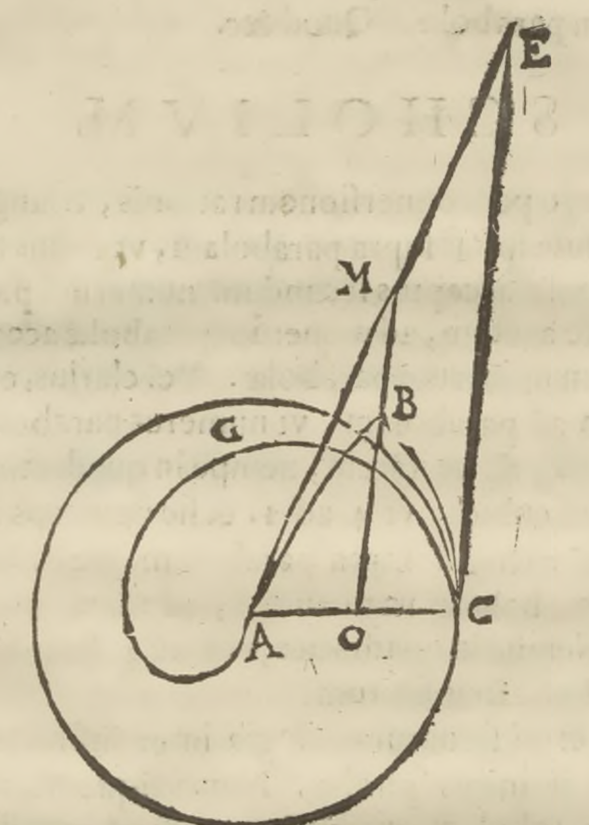
bicam, erit M O, tripla O B: si quadratoquadraticam, triplam: & sic deinceps. Vt M O, sit ad O B, vt numerus parabolæ ad vnitatem. Hæc in dicta proposit. probantur: videat ipsa lector in dicto loco. Sed ex his erit nobis.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Si in qualibet infinitarum parabolarum ducatur ordinatim applicata ad diametrum, & ab vna extremitate ordinatim applicatæ ducatur tangens parabolam, ab altera verò extremitate ducatur parallela diametro. Triangulum ab his, & ab ordinatim applicata formatum, erit ad parabolam, vt numerus parabolæ acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad numerum parabolæ.

IN schemate superiori esto quælibet parabola ABC, cuius ordinatim applicata ad diametrum OB, sit ipsa AC, AE, sit tangens, & CE, sit parallela diametro OB. Dico triangulum AEC, esse ad parabolam ABC, vt numerus parabolæ acceptus secundum numerum vnitate auctum, ad numerum. V.g. in parabola quadratica, vt 6. ad 2. seù, vt 3. ad 1. In cubica, vt 12. ad 3. seù vt 4. ad 1. & sic in infinitum. Occurrat OB, ipsi AE, in M. Ergo ex citata proposit. 50. Miscellanei hyperbolici, & parabolici, erit MO, ad OB, vt numerus parabolæ ad vnitatem. Ergo CE, dupla MO, erit ad BO, vt duplus numerus parabolæ ad vnitatem. Ergo triangulum AEC, erit ad parallelogrammum circumscriptum parabolæ ABC, vt numerus parabolæ ad vnitatem; nempe, vt numerus parabolæ acceptus secundum numerum vnitate auctum



auctum, ad numerum vnitate auctum: Sed ex quadratura infinitarum parabolarum assignata ex Caualerio in proposit. 1. lib. 1. de infinit. parab. est parallelogrammum circumscriptum parabolæ ad ipsam, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Ergo ex æquali, erit triangulum AEC, ad parabolam ABC, vt numerus parabolæ acceptus

ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum ad numerum parabolæ. Quod &c.

SCHOLIVM.

Erit ergo per conuerſionem rationis, triangulum ad exceſſum ipſius ſupra parabolam, vt dictus numerus parabolæ acceptus ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad numerum parabolæ acceptum ſecundum numerum parabolæ. Vel clarius, erit triangulum ad parabolam, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad vnitatem; nempe in quadratica, vt 3. ad 1. in cubica, vt 4. ad 1. & ſic deinceps. Et ad exceſſum trianguli ſupra parabolam, vt dictus numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Nempe in quadratica, vt 3. ad 2. In cubica, vt 4. ad 3. Et ſic in infinitum.

Non ergo ſeruatur analogia inter infinitas parabolas, & infinitas ſpirales. Nam vtique eſt triangulum ad parabolam quadraticam, & ad exceſſum ipſius ſupra parabolam, vt primus circulus circumſcriptus ſpatio ſpirali lineari ad ipſum ſpatium, & ad exceſſum ſupra ipſum; at non ſic eſt in alijs: ſed in ſpirali quadratica, eſt ex propoſit. 9. & ex eius corollario, circulus ad ſpatium, vt 4. ad 2. & non, vt 4. ad 1. vt triangulum ad trilineum cubicum; & ſic in alijs.

Sed vnum adnimaduertetur, quod equidem haud ſpernendum videtur, & eſt, quod in eadem ratione ſunt in qualibet parabola, triangulum AEC, ad parabolam ABC, & parallelogrammum ſemiparabolæ OBC, circumſcriptum ad trilineum, quod eſt exceſſus parallelogrammi ſupra ſemiparabolam. Nam vtrumque eſt ad vtrumque, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Pariter in eadem ratione ſunt triangulum AEC, ad exceſſum ſui ſupra parabolam, & parallelogrammum ſemiparabolæ circumſcriptum ad ipſam; nempe, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum.

DIGRESSIO.

Dum hæc, quæ ſcripſimus ſub prælo eſſent, accepimus epiſtolas à nobiliſſimo Geometra Petro Parelo Carauaggio Mediolanenſi, ac Mediolani commorante, ad nos traſmiſſas, datas ſub die 21. Iulij anni præſentis 1660. in quibus (prius à nobis de ſubiecto noſtræ impreſſionis monitus) ſic loquebatur. *Vedo per la ſua, che pone al Torchio vn' opera delle infinite ſpirali. Io credo, che V. R. hauerà notitia delle opere de Gio: Valliſio ſtampate in Oxonio, che argomenta con il methodo de gl' infiniti, e parla delle ſpirali.* His auditis, cogitabamus Vualliſium nobis præiuiſſe, ac opuſculum noſtrum de Infinitis ſpiralibus ad oleum, piperque demittendum. Porrò libro Vualliſij fruſtra apud bibliopolas, aut alios Venetijs quæſito, confugimus ad Excellentiſſimum Andream Morettum Patauij tunc manentem, ipſum rogantes, opus prædictum, ſi apud

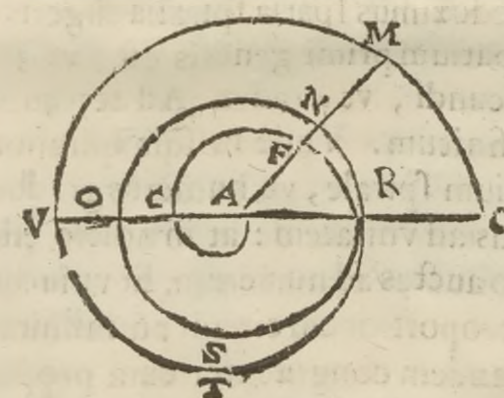
apud ipſum eſſet, nobis accommodare. Nec euanuit ſpes noſtra. Ille etenim Excellentiſſimus vir ſumma, qua pollet humanitate, vota noſtra expleuit, librumque ab ipſo mutuo recepimus. Quo vix inſpecto, ſtatim occurrit nobis tractatus de ſectionibus conicis, &c. protinuſque obſeruauimus in ipſa dedicatione afferri validiſſimum teſtimonium pro indiuiſibilibus. Ita namque ait. *Opus ipſum quod attinet; videbitis me ſtatim ab initio Cauallerij Methodum indiuiſibilium, quaſi iam à Geometris paſſim receptam tam huic, quam tractatui ſequenti (qui huic gemellus eſt) ſubſternere &c.* Audi Tacquet, & amplius noli de indiuiſibilibus iudicare. Methodus namque illa indiuiſibilium, *quam pro legitima, ac geometrica admittendam non exiſtimas*, à geometris paſſim recipitur. Deſine quæſo, adducendo argumentationis per indiuiſibilia exemplum, exclamare. *Quem conuincat iſthæc ratiocinatio.* Nam iuxta Vualliſium (qui pluribus in locis perhonorifice de indiuiſibilibus loquitur) conuincit paſſim geometras.

Opus ergo Vualliſij percurrentes, animaduertimus ipſum anno 1656. circa aliquot laboraſſe, circa quæ Caualerius in exercitationibus geometricis 1647. & nos in opere de infinitis parabolis anno 1659. Sed non pœnituit illa, quamuis ipſo poſteriores, euulgaſſe: namque procedimus methodo à ſua totaliter diuerſa; & iuxta nobis connaturale, geometrica geometricè pertractauimus.

Porrò valde gauiſi ſumus dum inſpeximus, infinitas

nitas

nitas ſpirales ab illo acutiſſimo viro explanatas, diuerſiſſimas fore toto cælo ab ijs, quas nos meditati eramus. In ſcholio etenim ſubnexo propoſit. 45. Arithmeticæ infinitorum, in quo ſuas infinitas ſpirales explicat, ſupponit ipſas diuerſificari ex diuerſa proportione in ſpirales incidentium ab initio ad inuicem ſecundum multiplicatam proportionem angulorum. V. g. in ſchem. ſequenti, ſi F A, incidens in ſpiralem ſit ad A C, itidem in ſpiralem incidentem, vt angulus N O R A, ad angulum O S R A; nempe vt arcus N O S R, ad arcum O S R; Secundum ipſum, ſpatium A C F R A, eſt primum ſpatium ſpirale. Si vero ſit F A, ad A C, in duplicata proportione prædicti anguli ad prædictum angulum, ſeù dicti arcus ad dictum arcum. Spatium erit ſecundum. Si in triplicata, tertium, &c. At in noſtris ſpiralibus res è contra acci-



dit,

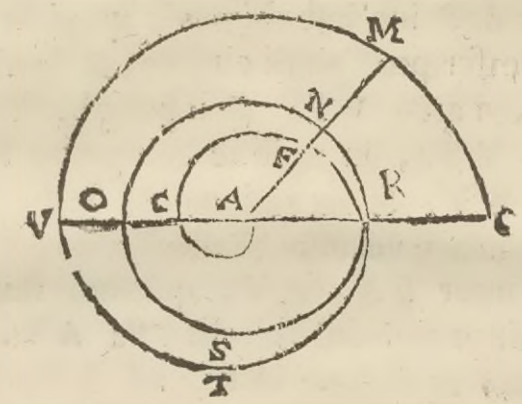
dit. Nam incidens ad incidentem est in submultiplici proportione anguli ad angulum, seù arcus ad arcum. In spirali etenim quadratica, cum ex posit. prim. sit quadratum FA, ad quadratum AC, vt arcus NOSR, ad arcum OSR, erit FA, ad AC, in subduplicata proportione arcus ad arcum. Et sic consequenter in cubica, in subtriplicata, & sic deinceps. Procedentes ergo per diuersa principia, & circa diuersissima laborantes, diuersissima etiam colligimus. Ipse etenim putans incidentes in spiralem augeri secundum multiplicem proportionem angulorum, seù arcuum, arguendo suo modo colligit spatia spiralia minui. Secundum enim ipsum, circulus circumscriptus primo spatio, seù primi generis est ad ipsum, vt 3. ad 1. Ad spatium secundi generis, vt 4. ad 1. Ad tertij, vt 5. ad 1. & sic in infinitum. Nos vero supponentes incidentes in spirales augeri in submultiplici proportione angulorum, seù arcuum, deduximus spatia spiralia augeri. Circulus enim ad spatium primi generis est, vt 3. ad 1. Ad spatium secundi, vt 4. ad 2. Ad tertij, vt 5. ad 3. & sic in infinitum. Vndè in suis spiralibus circulus est ad spatium spirale, vt numerus gradus spatij binario auctus ad vnitatem: at in nostro est, vt numerus binario auctus ad numerum. Et vniuersaliter ipse existimat proportionem circuli ad infinita spatia spiralia esse eandem congruenter cum proportione parallelogrammi ad infinita trilinea parabolica sibi inscripta. At nos in nostris spiralibus infinitis adinuenimus, proportionem circuli ad eadem infinita spatia (subintellige semper primæ reuolutionis) esse eandem cum congruenti, & explicata proportione trianguli ad excessus supra infinita trilinea parabolica sibi inscripta. Quæ proportiones in spirali Archimedea dumtaxat conueniunt. In ipsa etenim solummodo, tam parallelogrammum ad trilineum, quam triangulum parallelogrammi dimidium ad excessum ipsius supra trilineum, sunt vt 3. ad 1. In reliquis vero, parallelogrammum est ad trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus ad vnitatem: triangulum vero est ad excessum sui supra trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum. Cum ergo infinitæ spirales Clarissimi Vuallisij sic discrepent à nostris, prodeant etiam hæ.

Porrò quis recolens dicta in præsenti digressione, & modum supra explicatum, quo Clarissimus Torricellius considerauit analogiam inter spiralem linearem, & parabolam quadraticam, posset rationabilius, quam ibidem factum fuit, cogitare, analogiam illam, quam supra diximus nequaquam seruari inter infinitas spirales, & infinitas parabolas, vtique locum habere in infinitis parabolis, & in infinitis spiralibus Vuallisij. Nam ex supra dictis, patet, in his omnibus easdem proportiones seruari. Ex statim enim supra dictis liquet, circulum ad infinitas spirales Vuallisij esse secundum ipsum, vt numerus gradus spiralis binario auctus, ad vnitatem: & ad excessum

cessum ipsius supra spatia, vt numerus binario auctus ad numerum vnitate auctum. Ex dictis vero in schol. proposit. 32. constat in schem. illius, esse triangulum AEC, ad parabolam ABC, vt numerus parabolæ vnitate auctus (nempe, vt numerus spiralis binario auctus) ad vnitatem: & ad excessum ipsius supra parabolam, vt numerus vnitate auctus, ad numerum. Easdem ergo proportiones habent triangulum ad excessum, & ad parabolam, & circulus ad excessum, & ad spatium. Sicuti ergo, posset quis dicere, Torricellius patefecit similes analogias inter triangulum AEC, & excessum ipsius super parabola quadratica ABC, & inter circulum, & excessum ipsius supra spatium spirale lineare AGC, sic forsitan seruabitur similis analogia inter alias explicatas figuras. Sed similes discursus erronei sunt censendi, vt infra manifestabimus.

Sed prius Vuallisij infinitæ spirales, earumque genesis clarius sunt explicandæ, discrimenque inter nostras, & suas dilucidius est assignandum. Diximus initio operis, spirales nostras generari ex duplici motu eodem tempore peracto, nempe in schemate sequenti, puncti A, æquabiliter semper lati per semidiametrum AR; & semidiametri AR, circa centrum A, puncto R, describentis peripheriam vel æquabiliter, vel ita vt circumferentia peracta ad circumferentiam, vel angulus ad angulum esset, vt variæ temporum potestates ad inuicem. Hinc oriebatur, quod AC, AF, in spiralem incidentes

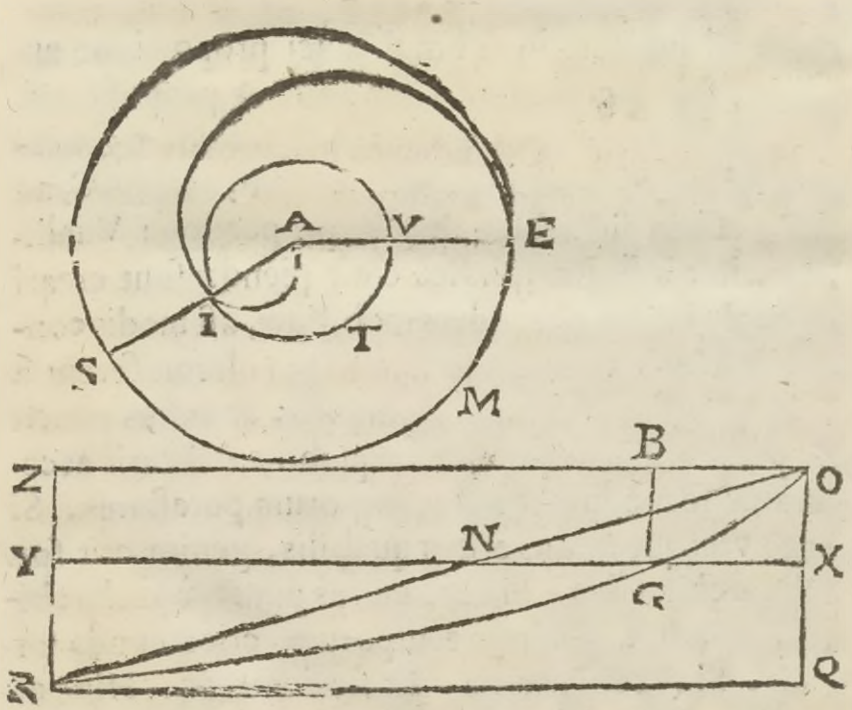
erant



erant ad inuicem in submultiplici proportione arcuum, seù angulorum. Cum enim ex proposit. pri. sit arcus ad arcum, vt potestas AC, eiusdem gradus cum spirali ad similem potestatem AF; patet AC, ad AF, esse in dicta submultiplici proportione. Vuallisij pariter infinitæ spirales concipiendæ sunt creari ex duplici motu eorundem mobilium, ast modis contrarijs. Motus enim semidiametri per circumferentiã concipiendus est semper æquabilis: at motus puncti A, per semidiametrum, vel æquabilis, vel variè acceleratus secundum varias temporum potestates. Si ergo vterque motus erit æquabilis, genita erit spiralis archimedea. Si vero motus puncti à acclerabitur secundum quadrata temporum, erit secunda spiralis. Si vt cubi, tertia. Et sic deinceps. Hinc ergo fiet, AC, ad AF, esse in multiplici proportione

tione arcus ad arcum; ſeù anguli, ad angulum, vt aic Vuallisius.

Ex hac doctrina habebimus, quod in ſchemat. ſeq. circumſcripto ſpirali circulo, & ſemidiametro AV, ducto arcu VTI. Erit peripheria EMSE, ad arcum VTI, in ratione compoſita ex ratione AE, ad AV, & ex ratione vel AE, ad AV, in ſpirali lineari; vel minoris mediarum extremarum continuè inter EA, AV, quarum numerus ſit vnitate minor numero ſpiralis, ad AV. V. g. in quadratica, ex ratione AE, ad AV, & mediæ

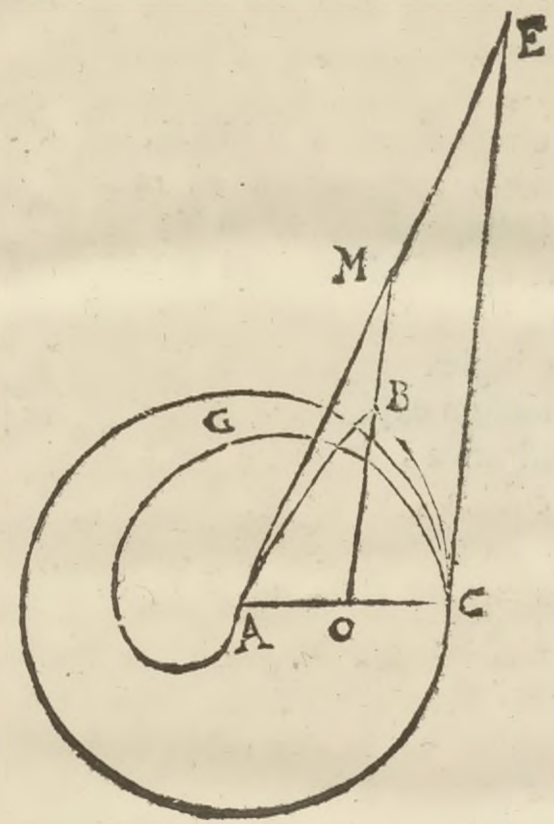


pro-

proportionalis inter AE, AV, ad AV. In cubica, ex rationibus AE, ad AV, & minoris duarum mediarum continuè proportionalium inter AE, AV, ad AV; & ſic deinceps. Quod patet, quia circumferentia EMSE, ad VTI, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad VTIV (nempe EA, ad AV) & VTIV, ad VTI; nempe EMSE, ad EMS. Sed in alijs ſpiralibus à lineari proportio EMSE, ad EMS, eſt ſub multiplex proportionis EA, ad AI, ſeù AV, ſecundum explicatum gradum ſpiralis: vnde eſt in quadratica, vt media inter EA, AV, ad AV: in cubica, vt minor duarum mediarum ad AV, &c. Ergo ratio EMSE, ad VTI, componetur ex ratione EA, ad AV, & dictarum mediarum ad AV.

His perceptis. Oſtendemus in ſchemate ſequenti, non ſeruari dictam analogiam inter circulum radij AC, & exceſſum ipſius ſupra ſpatium ſpirale AGC, & inter triangulum AEC, & exceſſum ipſius ſupra parabolam ABC. Hoc autem oſtendemus in ſpirali quadratica, & parabola cubica. Nam ſi dicta analogia curreret, mente centro A, interuallo AO, intellecta peripheria, eſſet CE, ad MB, vt circumferentia radij AC, ad circumferentiam deſcriptam in ipſo exceſſu contentam inter O, & punctum in ſpirali. Sed ratio circumferentiæ radij AC, ad dictam circumferentiam componitur ex ratione CA, ad AO, & mediæ proportionalis

 inter



inter CA, AO, ad ipſam AO. Ergo etiam ratio CE, ad MB, ex ijſdem componeretur rationibus. Porrò ratio CE, ad MB (de foris ſumpta MO,) componitur quoque ex rationibus CE, ad OM, & huius ad MB: & vt CA, ad AO, ſic CE, ad OM. Ergo OM, ad MB, eſſet, vt media proportionalis inter CA, AO, ad AO.

Quod

Quod vtique eſt falſiſſimum. Nam OM, ad MB, eſt ex citat. prop. 50. Miſcel. hyperb. &c. vt 3. ad 2: inter autem CA, duplam AO, & AO, nempe inter 4. & 2. non eſt 3. medium proportionale. Non ergo ſeruatur dicta analogia: & tamen ſi vera ſunt, quæ Vuallisius ſcripſit (nobis enim diuerſa methodo à ſua adhuc non conſtat) eſt ſemper eadem proportio.

In præſenti ergo opuſculo comprehenſa, ſunt ea, quæ quintò tibi proponimus, benigne lector, percurrenda. In quatuor primis noſtris operibus antea elaboratis quamplurimos, progreſſu temporis, errores animaduertimus: non paucis etiam præſens eſt aſperſum. Aſt nec illi, nec iſti, vt plurimum, materiam labefactant, nec ſenſum præcipuè intentum euertunt, adeovt lectori hærendum ſit in aſſertorum intelligentia. Errores verſantur ſæpe ſæpius vel in locutione latina, vel in alijs rebus non magni momenti. Hos errores dona nobis quæſo, benigne lector. Nec putamus te experiri inclementem, præcipuè ſi in typographijs aliquando te exercueris. Crede nobis, ingens tormentum authores exagitat in ipſa impreſſione; & plus laboris adinuenitur in hac, quam in compoſitione ipſamet, in rebus geometricis præſertim. Oſcitantia etenim, improbitas, & imperitia artificum ſic torquent, & angunt authores, vt non paucis vicibus cogitent momento diſperdere, quæ tempore prolixo, & magnis laboribus collegerunt. Porrò omnia hæc, & alia innumera ab impreſ-

pressione sunt inseparabilia. Sustine ergo clementer, benigne lector, errores eos, quibus nostra opuscula apparent conspurcata: & sicuti, fauente Deo, potes à nobis alia rationabiliter in posterum, immo quamprimum exspectare; ità nimis à scopo aberrares, si ea absque erroribus prosilire, cogitares. Vale.

F I N I S.